



Faculteit Toegepaste Wetenschappen

Vakgroep Elektrische energietechniek

Voorzitter: prof. dr. ir. J. Melkebeek

**SPELTHEORETISCH LEREN  
MET IMPRECIEZE WAARSCHIJNLIJKHEDEN:  
DYNAMISCHE ASPECTEN**

**ERIK QUAEGHEBEUR**

Promotor: prof. dr. ir. Gert de Cooman

SCRIPTIE ingediend tot het behalen van de academische graad van  
burgerlijk natuurkundig ingenieur

Academiejaar 2000–2001

## **Overzicht**

SCRIPTIE ingediend tot het behalen van de academische graad van  
burgerlijk natuurkundig ingenieur

Titel: *Speltheoretisch leren met imprecieze waarschijnlijkheden:  
dynamische aspecten*

Auteur: *Erik Quaeghebeur*

Promotor: *prof. dr. ir. Gert de Cooman*

Onderzoeksgroep SYSTEMS

Directeur: prof. dr. ir. D. Aeyels

Vakgroep Elektrische energietechniek

Voorzitter: prof. dr. ir. J. Melkebeek

Faculteit Toegepaste Wetenschappen

Universiteit Gent

Academiejaar 2000-2001

## **Trefwoorden**

speltheorie - imprecieze waarschijnlijkheden - fictief spelen - leren - evenwicht

## Samenvatting

We bestuderen een *leermethode* voor eindige spelen in de strategische vorm. Hierbij maken de spelers gebruik van een geschiedenis van reeds gespeelde sessies om inschattingen te maken over de waarschijnlijke strategiekeuze van een tegenspeler. Op die waarschijnlijk geachte strategiekeuze baseren de spelers zich om een eigen strategie te kiezen.

We bestuderen hiervoor eerst de wetenschapsdiscipline genaamd *speltheorie*. We gaan hier in op kenmerkende elementen van spelen en bekijken mogelijke voorstellingswijzen. We gaan dieper in op de voorstelling van een spel in de *strategische vorm*. Een *strategie*, een geheel aan regels die de keuze van acties binnen een spel volledig bepalen, en de *opbrengstfunctie*, die de uitslag van een spel voor de speler vastlegt, worden gedefinieerd. We bekijken hoe we de strategieën van een spel kunnen onderverdelen en welke strategieën optimaal zijn voor een speler. Zo komen we tot volgende concepten: *beste antwoord*, wat de verzameling van strategieën is die de opbrengst van de speler maximaliseert voor een gegeven strategie van zijn tegenspeler; *evenwicht*, wat een strategiecombinatie is waar geen enkele speler er voordeel bij heeft om van strategie te veranderen; *dominantie*, wat een methode is om strategieën te identificeren die het best niet gespeeld worden en *maximin-strategie*, wat een voorzichtige strategiekeuze is.

In tweede instantie bespreken we *imprecieze waarschijnlijkheden*, wat een onzekerheidsmodel is waar niet alleen rekening kan worden gehouden met onzekerheid, maar ook met onbepaaldheid. We gaan in op de gevolgen van rationaliteitsvereisten voor dit model en zijn rekenregels. Er wordt tevens een interpretatie op basis van gokgedrag gegeven aan de grootheden die we gebruiken om waarschijnlijkheden uit te drukken.

Voortbouwend op het voorgaande wordt onderzocht hoe we een beslissing kunnen maken tussen keuzes voor verschillende mogelijke strategieën. Dit leidt tot de definitie van *maximale strategieën*, die goede keuzes zijn voor een speler. Deze beslissingen worden gebaseerd op *het Dirichletmodel*, dat inschattingen weergeeft over de strategiekeuze van een tegenspeler. We leggen ook uit hoe dit model bijgesteld kan worden door verrekening van de informatie bekomen uit reeds gespeelde sessies.

Door het voorgaande te combineren kunnen we de beoogde leermethode formuleren. We maken hier een onderscheid tussen een *precieze methode*, waarbij er geen rekening wordt gehouden met eventuele onbepaaldheid en twee *imprecieze methodes*, waarbij dit wel gebeurt.

Uiteindelijk bekijken we de *dynamica* van de leermethode, namelijk de evolutie van de inschattingen van spelers en de door hen gespeelde strategieën. We onderzoeken voornamelijk onder welke voorwaarden er enkel convergentie naar een evenwicht zal optreden.

## Voorwoord

Degenen, die de opleiding natuurkundig ingenieur kennen, weten dat het onderwerp van deze scriptie geen verdere specialisatie inhoudt in een voor mij reeds bekend domein. Ik heb echter bewust gekozen voor een scriptie met een verbredend karakter, omdat ik meen dat dit mij in staat zal stellen betere keuzes te maken in zaken die belangrijk zullen zijn voor mijn verdere leven.

Ik heb deze scriptie zó geschreven dat ze een leek, die ook ik was toen ik aan dit werk begon, moet toelaten een goed beeld te krijgen van het behandelde onderwerp. Voor die lezers die reeds bekend zijn met het onderwerp of een deel ervan, heb ik getracht langdradige passages te vermijden. Het moet duidelijk zijn dat ik bij alle lezers een basis wiskunde veronderstel.

Ik heb het genoeg gehad begeleid te worden door Gert de Cooman. De samenwerking met hem was aangenaam informeel en hij stond altijd klaar om raad te geven, vragen te beantwoorden of me op weg te helpen bij lastiger stukken.

Ik wens mijn ouders uitgebreid te bedanken voor hun zorg en opvoeding, die ook voor deze scriptie van onschatbare waarde was. Mijn broer en zus bedank ik van harte voor hun kritisch oordeel over de helderheid, vorm en spelling van dit werk. Tom Cox en ook Matthias Troffaes hebben veel bijgedragen door leerrijke discussies met hen over het schrijven en vormgeven van een scriptie en ook door hun nuttige tips.

*In de versie die u nu onder ogen heeft, zijn enkele schoonheidsfoutjes verbeterd en zijn er enkele aanpassingen aangebracht die ze vooral geschikt maakt als elektronisch naslagwerk.*

*E.Q., 3 februari 2002*

## Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze SCRIPTIE voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de SCRIPTIE te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze SCRIPTIE.

Erik Quaeghebeur  
30 mei 2001

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
1.1	De structuur van deze scriptie . . . . .	1
1.2	Motivering . . . . .	3
1.3	Gebruikte terminologie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Speltheorie</b>	<b>4</b>
2.1	Inleiding . . . . .	4
2.1.1	Het spel . . . . .	4
2.1.2	Speltheorie en zijn toepasbaarheid . . . . .	5
2.1.3	Spelen met en spelen zonder samenwerking . . . . .	6
2.2	Basisdefinities . . . . .	6
2.2.1	Spelers . . . . .	6
2.2.2	Opbrengst en nut . . . . .	7
2.2.3	De extensieve vorm . . . . .	7
2.2.4	Informatie . . . . .	9
2.2.5	Strategieën . . . . .	10
2.2.6	De strategische vorm en de opbrengstfunctie . . . . .	12
2.2.7	Spelregels . . . . .	15
2.3	Evenwicht . . . . .	15
2.3.1	Beste antwoord . . . . .	15
2.3.2	Niet-coöperatief evenwicht . . . . .	18
2.3.3	Bereikbare opbrengsten en Pareto-optimaliteit . . . . .	19
2.3.4	Dominantie . . . . .	20
2.3.5	Het bestaan van evenwichten . . . . .	23
2.3.6	Spelen met tegengestelde belangen . . . . .	24
2.4	Bronvermelding . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Imprecieze waarschijnlijkheden</b>	<b>28</b>
3.1	Inleiding . . . . .	28
3.1.1	Onzekerheid en onbepaaldheid . . . . .	28

3.1.2	Interpretatie . . . . .	29
3.1.3	Precieze tegenover imprecieze waarschijnlijkheden . . .	30
3.1.4	Rationaliteit . . . . .	31
3.2	Basisdefinities . . . . .	32
3.2.1	Mogelijke toestanden . . . . .	32
3.2.2	Gokken . . . . .	32
3.3	Onderprevisies . . . . .	33
3.3.1	Onder- en bovenprevisies . . . . .	33
3.3.2	Gedraggerichte interpretatie . . . . .	34
3.3.3	Zeker verlies vermijden . . . . .	35
3.3.4	Coherentie . . . . .	36
3.3.5	Natuurlijke uitbreiding . . . . .	37
3.4	Geval van een lineaire ruimte $\mathcal{K}$ . . . . .	39
3.4.1	Axioma's voor coherentie . . . . .	39
3.4.2	Lineaire en nietszeggende previsies . . . . .	39
3.4.3	Onderenveloppes van lineaire previsies . . . . .	40
3.5	Imprecieze waarschijnlijkheden . . . . .	42
3.5.1	Notaties . . . . .	42
3.5.2	Onder- en bovenwaarschijnlijkheden . . . . .	42
3.5.3	Precieze en nietszeggende waarschijnlijkheden . . . . .	43
3.6	Bronvermelding . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Beslissingsproblemen en gevolgtrekking</b>	<b>45</b>
4.1	Inleiding . . . . .	45
4.2	Beslissingsproblemen . . . . .	45
4.2.1	Toelaatbare en maximale gokken en strategieën . . . . .	46
4.2.2	Bayes-strategieën . . . . .	48
4.2.3	Maximale strategieën in een imprecies model . . . . .	49
4.3	Statistische gevolgtrekking . . . . .	51
4.3.1	Het Dirichletmodel . . . . .	51
4.3.2	Het Dirichletmodel en speltheorie . . . . .	54
4.3.3	Het Dirichletmodel en lineaire previsies . . . . .	55
4.3.4	Het Dirichletmodel en coherente onderprevisies . . . . .	56
4.3.5	Het Dirichletmodel en waarschijnlijkheden . . . . .	58
4.4	Bronvermelding . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Speltheoretisch leren</b>	<b>59</b>
5.1	Inleiding . . . . .	59
5.1.1	Wat is (het doel van) een leermethode? . . . . .	59
5.1.2	Notaties . . . . .	60
5.1.3	Cournot-aanpassing . . . . .	61
5.2	Leren met het Dirichletmodel . . . . .	62
5.2.1	Fictief spelen . . . . .	62

5.2.2	De precieze leermethode . . . . .	63
5.2.3	De imprecieze leermethode . . . . .	64
5.3	Bronvermelding . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Dynamische aspecten van het leren</b>	<b>68</b>
6.1	Inleiding . . . . .	68
6.1.1	Dynamische aspecten? . . . . .	68
6.1.2	Beschouwde spelen . . . . .	68
6.1.3	Vershil in dynamica van het precieze en de imprecieze leermethode: een voorbeeld . . . . .	69
6.2	Definities . . . . .	71
6.2.1	Compatibele geschiedenissen . . . . .	72
6.2.2	Kortzichtige gedragsregels . . . . .	72
6.2.3	Adaptieve inschattingsregels . . . . .	76
6.2.4	Asymptotisch empirische inschattingsregels . . . . .	77
6.3	Stellingen . . . . .	78
6.3.1	Absorptie naar een strikt evenwicht . . . . .	78
6.3.2	Herhaald spelen van een zuiver strategieprofiel . . . . .	81
6.3.3	Herhaald spelen van een gemengd strategieprofiel . . . . .	84
6.4	Bronvermelding . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Besluit</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Uitbreidingen</b>	<b>89</b>
A.1	Spelen met meer dan twee spelers . . . . .	89
A.2	Kortzichtigheid en het imprecieze Dirichletmodel . . . . .	90
<b>B</b>	<b>Enkele wiskundige definities</b>	<b>92</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>95</b>
	<b>Register</b>	<b>97</b>

# Lijst van tabellen

2.1	Algemene opbrengstmatrix voor een spel met twee spelers. . . .	13
2.2	Een voorbeeld van een spel in de strategische vorm. . . . .	14
2.3	Dominantie. . . . .	20
2.4	Een voorbeeld van herhaalde strikte dominantie. . . . .	22
2.5	Het dilemma van de gevangenen. . . . .	22
4.1	De gegevens voor een a-priori-Dirichletverdeling en drie eruit volgende a-posteriori-Dirichletverdelingen. . . . .	53
6.1	Een voorbeeld van een spel met meerdere evenwichten. . . . .	69
6.2	Het gevecht der seksen. . . . .	70



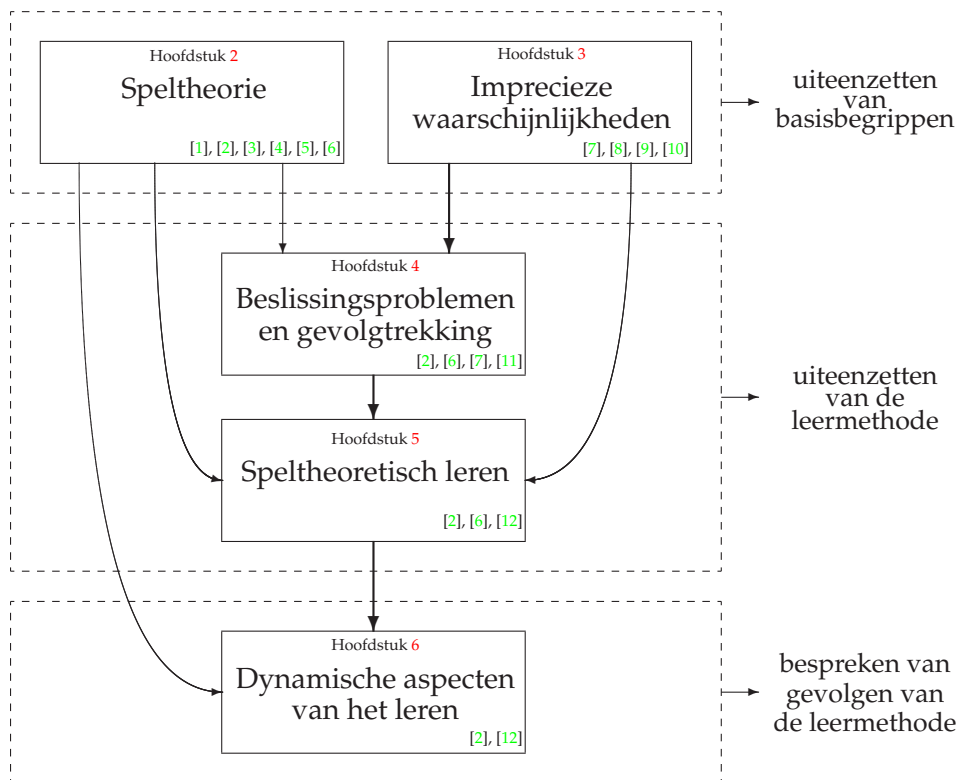
# Lijst van figuren

1.1	De structuur van deze scriptie. . . . .	1
2.1	Een voorbeeld van een spel in de extensieve vorm. . . . .	8
2.2	De spelboom voor een spel met imperfecte herinnering. . . . .	10
2.3	Simplexten voor verschillende $N^i$ . . . . .	12
2.4	Convexiteit en compactheid van $\Sigma^i$ en $\Sigma$ . . . . .	13
2.5	Het niet convex zijn van $BR^i(M)$ . . . . .	17
2.6	Beste antwoorden en evenwicht voor een eenvoudig spel. . . . .	19
2.7	Dominantie. . . . .	21
2.8	Maximin-strategieën. . . . .	26
3.1	$\underline{P}$ als onderenveloppe. . . . .	41
4.1	De grafiek van een a-priori-Dirichletverdeling en enkele daaruit volgende a-posteriori-Dirichletverdelingen. . . . .	53
4.2	Gelijkvormigheid van $M_0$ en $M_t$ . . . . .	57
5.1	Schematische weergave van de leercyclus. . . . .	59
5.2	Cournot-aanpassing. . . . .	62
5.3	Leren met het precieze Dirichletmodel. . . . .	64
5.4	Leren met het imprecieze Dirichletmodel. . . . .	66
6.1	Evolutie van het inschattingsregelprofiel in het gevecht der sek- sen voor de precieze leermethode. . . . .	70
6.2	Evolutie van het inschattingsregelprofiel in het gevecht der sek- sen voor de imprecieze leermethode. . . . .	71
6.3	Een tegenvoorbeeld van asymptotische kortzichtigheid bij de imprecieze leermethode. . . . .	75
6.4	Absorptie door een strikt evenwicht bij de precieze leermethode. . . . .	79
6.5	Niet-absorptie door een strikt evenwicht bij de imprecieze leer- methode. . . . .	79
B.1	Een concave functie. . . . .	93

# Inleiding

## 1.1 De structuur van deze scriptie

In figuur 1.1 geven we schematisch de structuur van dit werk weer. We hebben met pijlen aangeduid welk hoofdstuk als basis dient voor een bepaald ander hoofdstuk. Dikke pijlen geven het belangrijkste basishoofdstuk aan. Bij elk hoofdstuk werden de gebruikte referentiewerken weergegeven.



Figuur 1.1: De structuur van deze scriptie.

We moeten eerst een noodzakelijke basis uitbouwen willen we begrijpen waarover deze tekst handelt. Hoofdstuk 2 behandelt enkele *basisbegrippen uit de speltheorie*. Wij zullen ons hier beperken tot tweepersoonsspelen zonder samenwerking, voorgesteld in de strategische vorm. De voor dit werk belangrijkste concepten uit de speltheorie zijn: opbrengst, strategie, beste antwoord, evenwicht, dominantie en maximin-strategie. We bespreken de *theorie van imprecieze waarschijnlijkheden* in hoofdstuk 3. We gebruiken deze imprecieze waarschijnlijkheden als voorstellingswijze voor beschikbare gegevens. De keuze voor imprecieze waarschijnlijkheden in plaats van precieze – Bayesiaanse – waarschijnlijkheden maakt het mogelijk rekening te houden met de hoeveelheid beschikbare gegevens. De belangrijkste in dit hoofdstuk behandelde onderwerpen zijn: rationaliteit, gokgedrag, waarschijnlijkheden en previsions.

In tweede instantie kunnen we dan de beschouwde leermethode uiteenzetten. Hiervoor bespreken we in hoofdstuk 4 twee deelproblemen, namelijk *beslissingsproblemen en gevolgtrekking*. Beslissingsproblemen zijn situaties waarbij op basis van beschikbare gegevens een bepaalde beslissing moet worden genomen. Wij zullen onderzoeken hoe een speler een bepaalde strategiekeuze kan maken en hieraan is het belangrijke begrip maximale strategie verbonden. Gevolgtrekking behandelt het aanpassen van beschikbare gegevens wanneer nieuwe gegevens ter beschikking komen. Bij ons zal deze nieuwe informatie bekend worden wanneer een sessie van een spel gespeeld is en zal ze bestaan uit de strategiekeuze van de tegenspeler. Het centrale concept voor dit onderdeel is het Dirichletmodel. Hierna, in hoofdstuk 5, zullen we uiteenzetten wat *speltheoretisch leren* inhoudt. Dit zullen we doen door de theorie uit het vorige hoofdstuk toe te passen op spelen waarvan meerdere sessies gespeeld worden. De centrale concepten zijn hier: geschiedenis, inschattingregel en gedragsregel. Uiteindelijk worden dan de praktische leermethodes voorgesteld die gebaseerd zijn op het Dirichletmodel. Hiervan maakt er één gebruik van precieze waarschijnlijkheden en de andere van imprecieze waarschijnlijkheden.

Tenslotte zullen we in hoofdstuk 6 dan *dynamische aspecten* van deze leermethodes toelichten. Dit zal gebeuren onder de vorm van een aantal definities en stellingen over geschiedenissen, inschattingregels en gedragsregels. Onze aandacht zal vooral uitgaan naar convergentie naar evenwichten. Om af te sluiten geven we nog enkele suggesties voor verder onderzoek.

Naast de gewone hoofdstukken zijn er twee bijlagen. In bijlage A worden enkele uitbreidingen van de in dit werk besproken theorie kort behandeld. Op het gepaste moment zal er in de tekst naar worden verwezen. In bijlage B geven we als snelle referentie een aantal voor dit werk nuttige wiskundige definities en schrijfwijzes.

## 1.2 Motivering

Het onderwerp van deze scriptie past binnen het onderzoek van de toepasbaarheid van imprecieze waarschijnlijkheden in verschillende wetenschapsdisciplines. Deze discipline is hier de speltheorie.

Methodes van speltheoretisch leren worden traditioneel vooral gebruikt in een economische context, om bepaalde economische processen te onderzoeken. We zijn echter van overtuiging dat voor een veel bredere klasse van situaties speltheoretische leermethodes hun nut kunnen bewijzen. Namelijk deze situaties die te formuleren zijn onder de vorm van een formeel spel, dat vele malen gespeeld wordt en waar een bepaald optimum wenselijk is. Een mogelijk voorbeeld hiervan is de keuze van transmissiestrategieën door computers in een netwerk.

## 1.3 Gebruikte terminologie

De terminologie in deze scriptie is – gezien ze in het Nederlands geschreven is –, Nederlandstalig. Aangezien echter het merendeel van de literatuur in het Engels is, is in sommige gevallen een eigen vertaling gebruikt. Dit was het geval wanneer geen equivalent te vinden was in de beperkte Nederlandstalige literatuur (die voor het merendeel uit vertalingen bestaat). Het bleek ook af en toe dat er in het Nederlands voor sommige begrippen verschillende termen werden gebruikt. In dat geval was er dus een keuze nodig. De andere termen vermelden we in een voetnoot.

Met het bovenstaande in gedachten, is ervoor gekozen in het register ook de Engelse terminologie, voor zover deze in de gebruikte literatuur voorkomt, op te nemen. Een voorbeeld zoals

onzin (*nonsense*), 537

toont de gebruikte opbouw.

# Hoofdstuk 2

## Speltheorie

*“Het spel is onloochenbaar. Men kan al het abstracte loochenen: recht, schoonheid, waarheid, goedheid, geest, God. Men kan de ernst loochenen. Het spel niet.”*

– Johan Huizinga, in *Homo ludens*.

### 2.1 Inleiding

#### 2.1.1 Het spel

Vooraleer een formele beschrijving te geven van de spelen<sup>1</sup> die ons in dit werk interesseren, gaan we van het concept *spel* eerst een omschrijving geven.

Aan spelen zijn er altijd *regels* verbonden. Deze regels bepalen de mogelijke acties in een spel, regelen de volgorde van de acties en bepalen het resultaat op basis van de ondernomen acties.

We zien ook een *competitief* element in alle spelen. Men speelt namelijk ofwel tegen elkaar (b.v. tennis, voetbal, mens-erger-je-niet) ofwel tegen een vaste standaard (b.v. golf, patience, kruiswoordraadsels). Het is de bedoeling betere resultaten te boeken dan de tegenspeler of zo goed mogelijk te presteren ten opzichte van de vaste standaard.

Veelal is er ook sprake van *interactiviteit*. Die kan optreden indien verschillende spelers ( $\geq 2$ ) aanwezig zijn en indien de regels van die aard zijn dat acties van verschillende spelers invloed hebben op het spelverloop van de andere spelers. Als de spelers zich bewust zijn van deze interactiviteit, kunnen ze er rekening mee houden en intelligente beslissingen nemen, wat wordt weerpiegeld in de acties.

---

1. We gebruiken deze vorm van het meervoud, aangezien de andere – *spellen* – naar onze mening minder toepasselijk is, wegens de beperktheid van het betekenisveld.

In een groot aantal spelen komen we ook *toeval* of *willekeur* tegen. Dit is vanzelfsprekend bij kansspelen zoals dobbelen, maar ook niet te verwaarlozen bij andere spelen (denken we b.v. aan de juiste richting van een bal na het botsen). Veelal is deze willekeur slechts schijnbaar en het gevolg van beperkte kennis van de spelers (b.v. over de kleinste details van het speelveld). Het toevalselement kan toegevoegd worden aan de formele beschrijving door een speler 0 te beschouwen,<sup>2</sup> van wie de acties bepaald worden door een trekking uit een waarschijnlijkheidsverdeling<sup>3</sup> (die triviaal, niet-triviaal bekend of onbekend kan zijn).

### 2.1.2 Speltheorie en zijn toepasbaarheid

Speltheorie is een vrij recent onderzoeksdomein. Het eerste geschrift hierover van John von Neumann – die als pionier mag worden beschouwd –, verscheen in 1928.<sup>4</sup> De eerste uitgebreide uiteenzetting verscheen echter pas in 1944 met *Theory of Games and Economic Behavior* van de wiskundige John von Neumann en de econoom Oskar Morgenstern ([13]). Dit werk was de aanzet tot de uitgebreide en nog steeds voortdurende evolutie van dit domein.

Om van start te kunnen gaan, moeten we weten waarover we spreken, vandaar de volgende definitie.

#### **Definitie 2.1 (speltheorie)**

*Speltheorie definiëren we als die wetenschapsdiscipline die onderzoekt hoe een speler in een spelsituatie (zoals beschreven in §2.1.1) optimale beslissingen kan of moet nemen.*<sup>5</sup>

In onze omschrijving van ‘spel’ in §2.1.1 gebruikten wij het voorbeeld van de sportspelen. Speltheorie is echter veel breder toepasbaar. Voorbeelden van andere toepassingsgebieden zijn economie (b.v. de positionering van een product in de markt en de consumptie ervan), politieke en sociale wetenschappen (b.v. de positionering van politici op gevoelige thema’s en het stemgedrag van bevolkingsgroepen), biologie (b.v. de selectie van de soorten die het best aangepast zijn aan hun omgeving), informatietechnologie (b.v. de keuze van een optimale transmissiestrategie voor een transmissielijn met beperkte bandbreedte en meerdere gebruikers), ...

---

2. Speler 0 wordt ook wel de natuur genoemd.

3. We gebruiken de term waarschijnlijkheidsverdeling hier en verder in dit werk voor het begrip waarschijnlijkheidsdichtheidfunctie.

4. Dit betekent niet dat er niet reeds vroeger werk zou zijn verschenen over onderwerpen die direct verband houden met speltheorie. Ernst Zermelo publiceerde reeds in 1912 een bewijs over de zogenaamde volkomen gedetermineerdheid van eindige tweepersoons nulsomspelen met volmaakte informatie.

5. Deze definitie is zeker niet de enig mogelijke, maar is gekozen wegens haar bruikbaarheid voor dit werk.

Het is duidelijk dat speltheorie beperkt is in die zin dat ze rationeel correct gedrag van de spelers vooropstelt,<sup>6</sup> wat niet altijd het feitelijke gedrag is in spelen (echte spelers zijn subjectief, feilbaar en soms irrationeel). Dit is niet noodzakelijk de enige gemaakte veronderstelling. Net zoals gebruikelijk is in vele andere takken van de wetenschap worden er in de speltheorie geïdealiseerde situaties onderzocht om het beschouwde probleem handelbaar te maken. Het spreekt voor zich dat men rekening moet houden met welke aspecten vereenvoudigd, verwaarloosd of genegeerd werden om het geldigheidsgebied van de conclusies te bepalen.

### 2.1.3 Spelen met en spelen zonder samenwerking

Een belangrijke onderverdeling die we kunnen maken is deze tussen *spelen met samenwerking*, waarbij bindende overeenkomsten kunnen worden gesloten tussen de spelers, en *spelen zonder samenwerking*, waarbij dit niet mogelijk is.<sup>7</sup>

De term *bindende overeenkomst* wordt hier in de brede zin gebruikt. Dit zijn namelijk alle situaties waarbij vrijwillige beperkingen worden opgelegd aan de beschikbare acties en waarbij deze beperkingen worden toegepast. Deze beperkingen kunnen eenzijdig zijn of samen afgesproken worden door minstens twee spelers. Ze zijn enkel van toepassing op de bij de beslissing betrokken speler(s). Het gaat hier om bindende overeenkomsten binnen een spel, dus reeds nadat de spelregels vastliggen.

In dit werk zullen we ons verder beperken tot spelen zonder samenwerking.

## 2.2 Basisdefinities

### 2.2.1 Spelers

Een *speler*  $i$  is een rationele beslissingsnemer (b.v. een individu, een bedrijf, een computerprogramma), wiens beslissingen centraal zijn in de studie van het spel. We duiden de *spelersgroep* aan als

$$M = \{1, 2, \dots, m\}, m \in \mathbb{N}^+.$$

De tegenspelers van  $i$  duiden we aan met  $-i = \{1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, m\}$ . We gebruiken bovenindices om aan te duiden dat iets van een speler is (b.v.  $s^i$ ,  $\Sigma^{-i}, \dots$ ).

Wij zullen verder enkel spelen beschouwen met twee spelers, waarbij dus  $M = \{1, 2\}$ .<sup>8,9</sup>

6. In hoofdstuk 3 gaan we in op rationaliteit.

7. Ook respectievelijk coöperatieve en niet-coöperatieve spelen genoemd.

8. In §A.1 van bijlage A gaan we even in op spelen met  $m > 2$ .

9. In dit geval kan  $-i$  gezien worden als een verkorte vorm van  $3 - i$ .

### 2.2.2 Opbrengst en nut

Het resultaat van het spelen van het spel is dat er aan de spelers een *opbrengst* (grootheid) wordt uitgekeerd. Deze opbrengst wordt uitgedrukt in *nut* (eenheid), een begrip dat van groot belang is om de irrationaliteit in het waardeoordeel van de spelers over de opbrengst zoveel mogelijk uit te bannen.

#### **Definitie 2.2 (nut)**

*Nut is een nauwkeurige kwantificering van de voorkeuren van een speler ten aanzien van bepaalde zaken. Dit kwantificeren bestaat uit het verbinden van een eindig<sup>10</sup> reëel getal ( $\in \mathbb{R}$ ) met die zaken om de aantrekkelijkheid ervan weer te geven.*

De opbrengst kan dus een positief of negatief getal zijn en wordt dan respectievelijk winst of verlies genoemd. Om te benadrukken dat we over nut spreken zullen we de notatie  $\mathbb{P}$  gebruiken voor alle reële getallen die nut voorstellen.

We zullen verder veronderstellen dat de opbrengst wordt uitgedrukt in een *lineair nut*. Lineariteit zal namelijk verderop (§3.2.2) een nodige eigenschap van de opbrengstschaal blijken. We kunnen bijvoorbeeld zo'n lineair nut construeren door de opbrengst uit te drukken in *kansgeld* (ingevoerd in [5, §13]; wij volgen de formulering van [7, §2.2.2]). Beschouw hiervoor een loterij met een prijs die voor de spelers aantrekkelijk is. Voor deze loterij zijn een voldoende aantal lotjes beschikbaar. De kans dat een speler de prijs wint is dan evenredig met het aantal lotjes dat hij bezit. Het kansgeld zijn dan de lotjes, die voor de speler een bepaald nut hebben. Wegens de additiviteitseigenschappen van kansen zullen twee lotjes dus dubbel zo nuttig zijn als één lotje. Als bijkomende veronderstelling is dit kansgeld oneindig verdeelbaar (we kunnen b.v. de lotjes in stukjes knippen en de snippers verder gebruiken).<sup>11</sup> In [14, §3.2] wordt beargumenteerd dat ook gewoon geld benaderd als een lineair nut kan worden beschouwd. Voorwaarden hiervoor zijn dat de beschouwde opbrengsten klein zijn ten opzichte van het fortuin van de speler en dat het interval van mogelijke opbrengsten beperkt is.

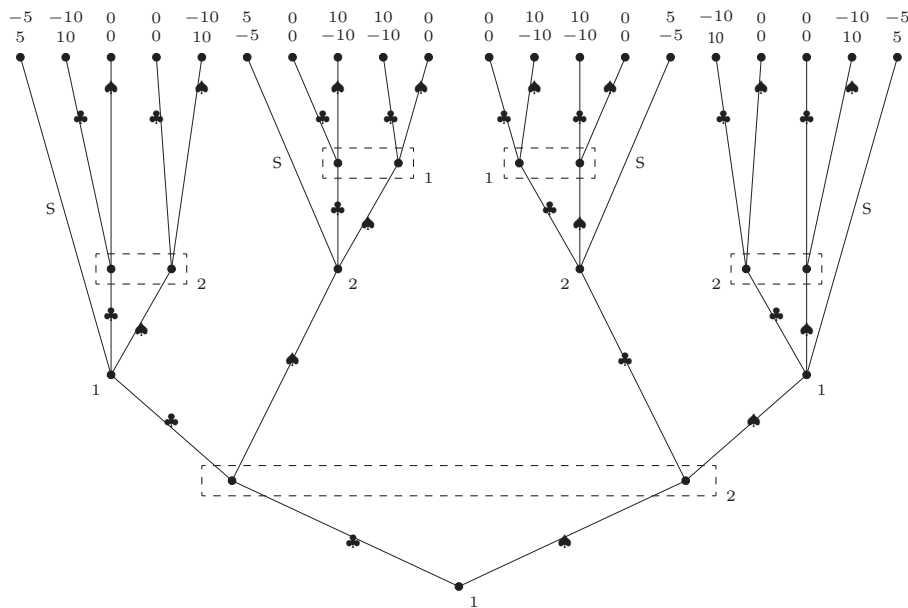
### 2.2.3 De extensieve vorm

Spelen kunnen op verschillende manieren voorgesteld worden, afhankelijk van de aspecten van het spel waarin men geïnteresseerd is.

10. Spelen waar sprake zou kunnen zijn van oneindige opbrengsten, b.v. deze op leven en dood, worden dus niet beschouwd.

11. Strikt genomen is deze voorwaarde niet noodzakelijk en kan er gebruikt worden gemaakt van geheelwaardige ( $\in \mathbb{Z}$ ) opbrengsten. Bezie [7, eindnoot 5 bij §2.2] voor het belang hiervan voor de formulering van het begrip coherentie (dat in hoofdstuk 3 wordt ingevoerd). Deze voorwaarde hebben we echter wel nodig wanneer we ook spelen willen beschouwen waarbij de verhouding van opbrengsten irrationaal is.





**Figuur 2.1:** Een voorbeeld van een spel in de extensieve vorm.

De *extensieve vorm* toont de verschillende acties die een speler kan kiezen gedurende het spelverloop. Dit kan gedaan worden door gebruik te maken van een *spelboom*. Hierin bevindt een speler zich op een *beslissingsknooppunt* wanneer hij aan zet is. De gelijktijdige acties van de spelers worden sequentieel voorgesteld met behulp van *informatiesets*, die verzamelingen van knooppunten van een speler zijn. Ze geven aan op welke knooppunten een speler zich bij een bepaalde zet kan bevinden. De speler zelf weet enkel dat hij in de informatieset zit, maar niet op welk knooppunt in deze informatieset. De kleinste informatieset is één knooppunt. Op de eind(knoop)punten (van het spel) wordt de opbrengst van de verschillende spelers aangegeven.

Ter illustratie bekijken we kort een eenvoudig spel (aangepast uit [1, H1 §2.1]) in de extensieve vorm dat weergegeven is in figuur 2.1. Twee spelers schrijven tegelijkertijd ♣ of ♠ op een blad (zonder dat de tegenspeler dit kan zien). Wanneer er verschillende tekens opgeschreven werden is speler 1 de winnaar en speler 2 de verliezer. Wanneer er daarentegen twee dezelfde tekens werden genoteerd wint speler 2 en verliest speler 1. De winnaar krijgt een opbrengst van 5 (dus een winst van 5) en de verliezer een opbrengst van -5 (dus een verlies van 5). Een verliezende speler kan beslissen te stoppen met spelen (actie S) en het spel stopt sowieso na twee beurten. In figuur 2.1 zijn de knooppunten voorgesteld door bolletjes en de informatiesets door stippelijnomkadering. Beide zijn aangeduid met het nummer van de bijhorende speler. De opbrengsten staan aan de eindknooppunten, met die van speler 1 boven

die van speler 2.

Het geïllustreerde voorbeeld maakt duidelijk dat, zelfs bij een eenvoudig spel, de uitgebreide vorm omslachtig is. Deze lijkt dus weinig bruikbaar voor ingewikkelde spelen. We hebben deze vorm hier besproken om enkele hierna volgende begrippen te helpen verduidelijken.

#### 2.2.4 Informatie

Het is van belang te weten over welke informatie de spelers beschikken en daarvoor is het nuttig een onderscheid te maken tussen verschillende soorten informatie.<sup>12</sup>

##### **Definitie 2.3 (volledige informatie)**

*We spreken over een spel met volledige informatie indien elke speler de spelersgroep kent, weet welke de beschikbare acties zijn (voor alle spelers) en welke verschillende gevolgen deze acties hebben (voor alle spelers). Indien één van deze voorwaarden niet vervuld is spreken we van een spel met onvolledige informatie.*

De volgende twee vormen van informatie houden verband met de informatiesets.

##### **Definitie 2.4 (perfecte informatie)**

*Indien elke informatieset uit één knooppunt bestaat spreken we van een spel met perfecte informatie, indien dit niet het geval is spreken we van een spel met imperfecte informatie.*

##### **Definitie 2.5 (perfecte herinnering)**

*Wanneer de informatiesets overeenkomen met een situatie waarbij alle spelers alle vorige zetten onthouden (i.e. de acties van alle spelers in de spelersgroep), dan spreken we van een spel met perfecte herinnering. In het andere geval spreken we van een spel met imperfecte herinnering.*

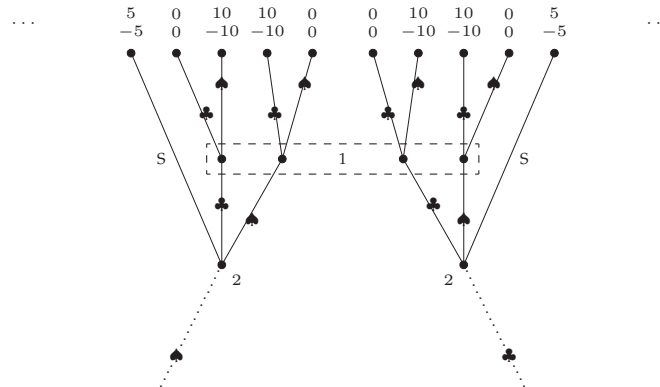
Bemerk dat perfecte informatie altijd perfecte herinnering impliceert, maar niet omgekeerd. Er wordt ook gesproken van volmaakte informatie in het geval dat volledige en perfecte informatie samen optreden.

Het spel in figuur 2.1 is er één van volledige informatie, imperfecte informatie en perfecte herinnering. Indien we te maken zouden hebben met de variant geïllustreerd in figuur 2.2, is er sprake van imperfecte herinnering, wat te zien is aan de ruimere informatieset (ze bevat meer knooppunten).

Alles wat voor alle spelers gekend is (en waarvan geweten is dat ieder dit kent) noemen we *gemeengoed*. We zeggen dus dat de informatiesituatie gemeengoed is als elke speler correct geïnformeerd is over hetgeen de andere

---

12. De hier gegeven definities zijn geldig voor alle spelersaantallen  $m \in \mathbb{N}^+$ .



**Figuur 2.2:** De spelboom voor een spel met imperfecte herinnering (wijziging van figuur 2.1).

spelers weten en er zich van bewust is dat de andere spelers evenzeer correct geïnformeerd zijn.

In alle spelen die we verder zullen beschouwen maken we geen veronderstellingen over perfecte informatie en perfecte herinnering. De reden hiervoor is dat deze veronderstellingen onbelangrijk zijn in de door ons gebruikte voorstellingswijze, wat duidelijk zal gemaakt worden in §2.2.6.

### 2.2.5 Strategieën

**Definitie 2.6 (strategie)**

Een strategie van een speler is een reeks instructies die volledig bepaalt welke actie wordt ondernomen op elke informatieset van een spel.

Na het vastleggen van één of meerdere strategieën voor een spel hoeft een speler niet meer actief bij het spelverloop betrokken te zijn (hij kan vervangen worden door iets of iemand die zijn instructies uitvoert). Hij moet bij de aanvang van het spel enkel kiezen welke strategie hij zal gebruiken.

We schrijven  $s^i$  voor een strategie van speler  $i$ . Er geldt dat  $s^i \in S^i$ , waarbij  $S^i = \{1, \dots, N^i\}$  (met  $N^i \in \mathbb{N}^+$ ) de *individuele strategieruimte* is van speler  $i$ . Voor de tegenspeler noteren we  $s^{-i} \in S^{-i}$  en  $N^{-i}$ . We geven de strategieën dus weer door middel van een natuurlijk getal (b.v. genoteerd  $k,l$ ) en het zal uit de context duidelijk zijn van welke speler een besproken strategie is. Het cartesisch product van de individuele strategieruimten

$$S = S^1 \times S^2 = S^i \times S^{-i}$$

wordt de *strategieruimte van het spel* genoemd. Een element uit  $S$  is een *strategieprofiel*  $s = (s^1, s^2) = (s^i, s^{-i})$ , dat bestaat uit één strategie per speler.

Spelen waarbij de strategieruimten een eindig aantal zuivere strategieën bevat (volgens de hier bij ons gegeven definitie dus altijd) worden *eindige spelen* genoemd.

We hebben totnogtoe enkel zogenaamde *zuivere strategieën* beschouwd. Indien we echter toelaten dat in een strategie bepaalde keuzes gemaakt worden met behulp van een toevalsgenerator (b.v. waarschijnlijkheid  $p$  voor een bepaalde actie en waarschijnlijkheid  $1 - p$  voor een andere actie, met  $p \in [0, 1]$ ) spreken we van een *gemengde strategie*. Deze benaming is gekozen omdat we een gemengde strategie ook altijd kunnen schrijven als een waarschijnlijkheidsverdeling over zuivere strategieën (desnoods door de gepaste zuivere strategieën vast te leggen). Hierna zullen we gemengde strategieën steeds opvatten als zo'n waarschijnlijkheidsverdeling over zuivere strategieën. Dit impliceert dat we veronderstellen dat het spel vele malen wordt gespeeld, waardoor de waarschijnlijkheidsverdeling zichtbaar kan worden. We zien in dat zuivere strategieën een randgeval zijn van de gemengde strategieën (nl. deze met waarschijnlijkheid 1 voor één zuivere strategie en 0 voor de andere zuivere strategieën).

Analoog aan het geval van de zuivere strategieën schrijven we voor gemengde strategieën  $\sigma^i \in \Sigma^i \equiv \Delta(S^i)$  en voor gemengde strategieprofielen

$$\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^i, \sigma^{-i}) \in \Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2 = \Sigma^i \times \Sigma^{-i},$$

waarbij we weerom de gebruikelijke notatie voor tegenspelers hebben weergegeven. We gebruiken  $\Delta(S^i)$  om de verzameling van alle waarschijnlijkheidsverdelingen van elementen van  $S^i$  weer te geven. Buiten  $\sigma$  zullen we ook af en toe  $\tau$  en  $\rho$  gebruiken om gemengde strategieën te benoemen.

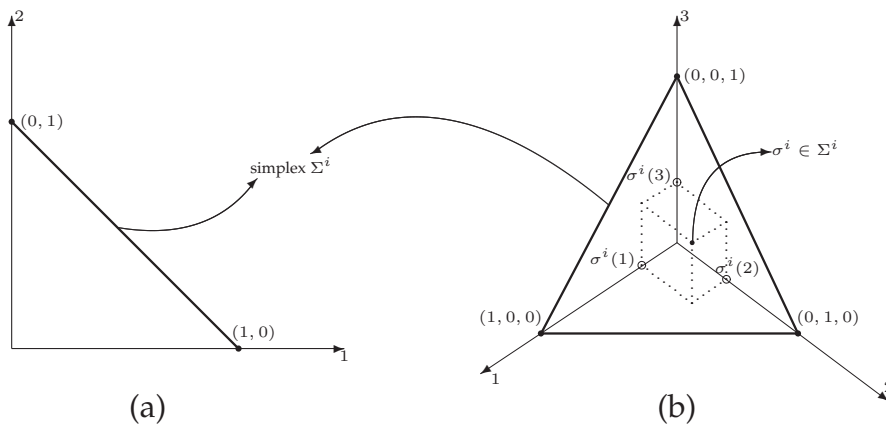
We kunnen bovenstaande begrippen (voor één speler  $i$ ) handig geometrisch voorstellen met behulp van een *simplex*, een (hyper)veelhoek die  $\Sigma^i$  voorstelt. Hiervoor associëren we met elke zuivere strategie een onafhankelijke eenheidsvector in  $\mathbb{R}^{N^i}$ , bijvoorbeeld

$$s^i = k \leftrightarrow \underbrace{(0, \dots, 0, \overset{\substack{k^{\text{de}} \text{ element}}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0)}_{N^i \text{ elementen}}$$

voor een strategie  $k$  van  $S^i$ . Een gemengde strategie wordt dan voorgesteld door een lineaire combinatie van deze eenheidsvectoren, waarbij de coëfficiënten positief zijn en hun som gelijk is aan één. We schrijven dus

$$\sigma^i \leftrightarrow (\sigma^i(1), \dots, \sigma^i(k), \dots, \sigma^i(N^i)),$$

waarbij  $\sigma^i(k) \in [0, 1]$  het gewicht van strategie  $k$  in een gemengde strategie van  $\Sigma^i$  is en  $\sum_{k=1}^{N^i} \sigma^i(k) = 1$ . We zien dan dat de simplex van  $\Sigma^i$  een deelverzameling is van  $\mathbb{R}^{N^i}$ .



**Figuur 2.3:** Simplexen voor  $N^i$  gelijk aan (a) 2 en (b) 3.

Het voorgaande wordt geïllustreerd in figuur 2.3 voor het geval van 2 en 3 zuivere strategieën. Aan elke as wordt de corresponderende strategie weergegeven. Het is duidelijk dat we de assen kunnen weglaten indien we de vertices overeenkomend met de zuivere strategieën duidelijk benoemen.

We kunnen een afstand tussen twee strategieën  $\sigma^i$  en  $\tau^i$  als volgt definiëren (supremumnorm)

$$d(\sigma^i, \tau^i) \equiv \|\sigma^i - \tau^i\| = \sup_{s^i \in S^i} |\sigma^i(s^i) - \tau^i(s^i)|.$$

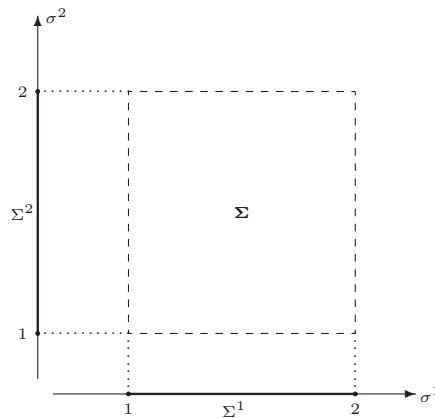
Bemerk dat de individuele ruimte  $\Sigma^i$  van gemengde strategieën  $\sigma^i$  convex is. Ze is ook compact. Dit volgt uit het feit dat ze gesloten en begrensd is, wat duidelijk is indien we naar haar voorstelling als simplex kijken. Een gevolg hiervan is dat ook  $\Sigma$  compact en convex is. Dit volgt uit het feit dat het cartesisch product van compacte en convexe verzamelingen ook compact en convex is. Daar  $\Sigma^i, \forall i \in M$  compact en convex zijn is aan deze voorwaarde voldaan. Dit wordt geïllustreerd in figuur 2.4.

We beschouwen verder enkel nog spelen waarbij de spelers een eindig aantal zuivere strategieën hebben. Ook zullen we verder geen onderscheid meer maken tussen een strategie of een strategieruimte en hun voorstelling in  $\mathbb{R}^{N^i}$  (en dus  $\Sigma^i \subseteq \mathbb{R}^{N^i}$ ).

### 2.2.6 De strategische vorm en de opbrengstfunctie

De *strategische vorm* bestaat enerzijds uit een opsomming van alle beschikbare zuivere strategieën en anderzijds uit de *opbrengstmatrix*<sup>13</sup>. Deze tabel geeft de opbrengst van de spelers bij een bepaald strategieprofiel. Het spreekt voor

13. Dit wordt ook ontvangstmatrix, spelmatrix of betaalrooster genoemd.



**Figuur 2.4:** Convexiteit en compactheid van  $\Sigma^i$  en  $\Sigma$ , geïllustreerd voor het geval  $N^1 = 2 = N^2$ .

**Tabel 2.1:** Algemene opbrengstmatrix voor een spel met twee spelers.

$(s^1, s^2)$	1	...	$l$	...	$N^2$
1	$\mathbf{u}(1, 1)$		...		$\mathbf{u}(1, N^2)$
$\vdots$		$\ddots$			
$k$	$\vdots$		$\mathbf{u}(k, l)$		$\vdots$
$\vdots$				$\ddots$	
$N^1$	$\mathbf{u}(N^1, 1)$		...		$\mathbf{u}(N^1, N^2)$

zich dat enkel in het geval van  $m = 2$ , de matrix eenvoudig valt op te schrijven. Voor berekeningen (met een computer) is dit echter geen beperking.

**Definitie 2.7 (opbrengstfunctie)**

De opbrengstmatrix is equivalent met een opbrengstfunctie voor alle spelers  $i$ , namelijk

$$u^i : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{P} : \mathbf{s} \rightarrow u^i(\mathbf{s}), \forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}.$$

De opbrengstvector wordt dan  $\mathbf{u}(\mathbf{s}) = (u^1(\mathbf{s}), u^2(\mathbf{s}))$ . Er worden verder ook nog de volgende notaties gebruikt:  $u^1(s^1, s^2)$ ,  $u^i(s^i, s^{-i})$ . We geven in tabel 2.1 weer hoe een opbrengstmatrix er in het algemeen voor een spel met 2 spelers uitziet.

We kunnen het bovenstaande nog verder verduidelijken door een eenvoudig voorbeeld te geven. Beschouw een spel met twee spelers, waarbij beide spelers beschikken over 3 zuivere strategieën. Een opbrengstmatrix voor zo'n spel wordt gegeven in tabel 2.2. Deze opbrengstmatrix kan hier staan voor een spelletje computerschaak: beide spelers hebben drie schaakprogramma's tot

**Tabel 2.2:** Een voorbeeld van een spel in de strategische vorm.

s	1	2	3
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(1, 0)	(0, 1)
2	(0, 1)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(1, 0)
3	(1, 0)	(0, 1)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

hun beschikking. Deze opbrengstmatrix zou echter evengoed voor een totaal ander spel kunnen staan (b.v. schaar-steen-papier). Bij gelijkspel krijgt elk 1/2, anders krijgt de winnaar 1 en de verliezer 0.

In het voorgaande voorbeeld en verder in alle beschouwde spelen veronderstellen we dat de strategieën tegelijkertijd gekozen worden. Dit betekent dat de spelers niet weten welke strategie de andere speler gekozen heeft. Merk op dat dit niet betekent dat de strategiekeuze van een speler de genomen acties van de andere speler niet zouden beïnvloeden. Denken we met name aan definitie 2.6 van een strategie, waaruit volgt dat een speler de acties van zijn tegenspeler kan anticiperen en in zijn strategie de gepaste instructies kan vastleggen.

We zien dus dat de strategische vorm de onderliggende structuur, met name welke acties worden genomen, volledig verbergt. Indien men daar echter niet in is geïnteresseerd, is de strategische vorm zeer handig om mee te werken, wat wij verder ook zullen doen. De strategische vorm kan uit de extensieve vorm afgeleid worden, maar bovenstaand voorbeeld toont dat we ze ook onmiddellijk kunnen opschrijven. Alhoewel ze nodig kan zijn voor het formuleren van strategieën, is de kennis van de informatiesets (perfecte informatie, perfecte herinnering) voor de analyse van een spel in de strategische vorm onbelangrijk.

De opbrengstmatrix toont enkel de opbrengst voor alle zuivere strategieprofielen, maar dit is genoeg om ook de opbrengst te bepalen voor gemengde strategieprofielen.

**Definitie 2.8 (opbrengstfunctie voor gemengde strategieprofielen)**

De opbrengstfunctie voor speler  $i$  voor een gemengd strategieprofiel wordt

$$\begin{aligned}
 u^i : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{P} : \sigma \rightarrow u^i(\sigma) = u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) \\
 &= \sum_{k=1}^{N^i} \sum_{l=1}^{N^{-i}} u^i(k, l) \sigma^i(k) \sigma^{-i}(l).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bemerkt dat dit niets anders is dan de verwachtingswaarde van  $u^i$ , gegeven de waarschijnlijkheidsverdelingen  $\sigma^i$  en  $\sigma^{-i}$ .<sup>14</sup> Het is dus duidelijk dat de eerder gemaakte veronderstelling dat we vele malen hetzelfde spel spelen hier van essentieel belang wordt, wil de verwachtingswaarde voldoende goed benaderd worden. We zien verder dat de opbrengstfunctie een lineaire functie is van  $\sigma^i$  en  $\sigma^{-i}$ , daar ze enkel afhankelijk is van het product  $\sigma^i(k)\sigma^{-i}(l)$  met  $(k, l) \in S$ . Hier volgt ook uit dat de opbrengstfunctie continu is op haar definitiegebied.

In de strategische vorm kunnen we definitie 2.3 als volgt herformuleren.

**Definitie 2.9 (volledige informatie in de strategische vorm)**

*Men spreekt van een spel met volledige informatie indien alle spelers  $M$ , alle  $S^i$  en alle  $u^i(s)$ ,  $\forall s \in S$  (met  $i \in M$ ) kennen en weten dat deze kennis gemeengoed is.*

### 2.2.7 Spelregels

In het voorgaande hebben we nooit expliciet vermeld welke de *spelregels* waren die we beschouwden. Aangezien de strategische vorm voor ons voldoende informatie bevat, zullen we dit ook verder nooit expliciet doen. Vandaar dat het interessant is hier eens te overlopen waaruit die regels bestaan. Namelijk

- (a) de informatiesituatie,
- (b) de eventuele mogelijkheid bindende overeenkomsten te sluiten (bij ons is dit nooit het geval),
- (c) de mogelijke acties binnen een spel en/of de mogelijke strategieën,
- (d) de opbrengstfunctie,
- (e) de elementen die tot het gemeengoed behoren (bij ons is de informatiesituatie gemeengoed).

## 2.3 Evenwicht

In een spel zullen de spelers, gezien ze rationeel handelen, die strategieën kiezen die voor hen het gunstigst zijn (i.e. zoveel mogelijk nut leveren). In bepaalde spelen bestaan er dan strategieprofielen  $\sigma_*$  (soms slechts één) die gunstiger zijn dan de strategieprofielen van  $\Sigma$  in hun omgeving. Deze strategieprofielen worden evenwichtspunten – of kort: evenwicht – genoemd.

### 2.3.1 Beste antwoord

Voor elke strategie van de tegenspeler kunnen optimale strategieën gevonden worden, die als volgt worden gedefinieerd.

14. De toevalsgenerator van speler  $i$ , die uit de gemengde strategie  $\sigma^i$  een zuivere strategie kiest, veronderstellen we volledig onafhankelijk van deze van speler  $-i$ .



**Definitie 2.10 (individuele beste antwoord)**

Het individuele beste antwoord voor speler  $i$  op strategie  $\sigma^{-i}$  is  $BR^i(\sigma^{-i}) \subseteq \Sigma^i$  met

$$\begin{aligned} BR^i(\sigma^{-i}) &= \left\{ \sigma^i \in \Sigma^i \mid u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \max_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}) \right\} \\ &= \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}). \end{aligned}$$

We zien in de definitie dat we niet veronderstelden dat het individuele beste antwoord uniek is. Dit betekent dus dat het individuele beste antwoord die strategieën zijn die de opbrengst van speler  $i$  maximaliseren voor een gegeven strategie van de tegenspeler. Het spreekt dus voor zich dat de opbrengst voor alle  $\sigma^i \in BR^i(\sigma^{-i})$  gelijk is.

In volgende stelling geven we enkele interessante eigenschappen van het individuele beste antwoord.

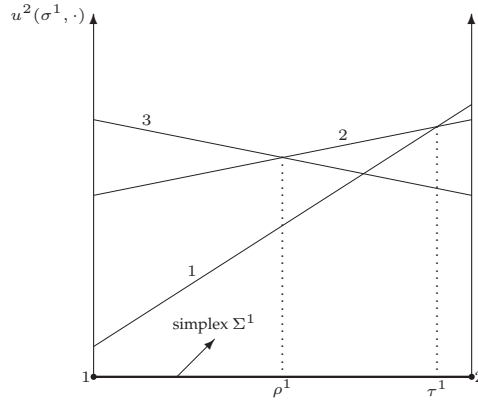
**Stelling 2.1**

Voor alle  $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$  is  $BR^i(\sigma^{-i})$  een compacte en convexe deelverzameling van  $\Sigma^{-i}$  waarvoor geldt dat een zuivere strategie  $k \in BR^i(\sigma^{-i})$ , indien er een  $\sigma^i \in BR^i(\sigma^{-i})$  bestaat waarvoor  $\sigma^i(k) > 0$ .

**Bewijs van stelling 2.1** We zullen het bewijs in drie stappen leveren.

- (a)  $BR^i(\sigma^{-i})$  is compact: Gezien  $\Sigma^{-i}$  compact is moeten we enkel nagaan of  $BR^i(\sigma^{-i})$  gesloten is. De opbrengst overeenkomend met een  $\sigma^i \in BR^i(\sigma^{-i})$  is het singleton  $u_+^i(\sigma^{-i}) = \{\max_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \sigma^{-i})\} \subset \mathbb{P}$ , wat een gesloten verzameling is. Als invers beeld van de continue functie  $u^i(\cdot, \sigma^{-i})$  met beeld  $u_+^i(\sigma^{-i})$ , is  $BR^i(\sigma^{-i})$  dan ook gesloten.
- (b)  $BR^i(\sigma^{-i})$  is convex: Veronderstel dat  $\hat{\tau}^i, \check{\tau}^i \in BR^i(\sigma^{-i})$ . Noteer vervolgens  $\tilde{\tau}^i = \lambda \hat{\tau}^i + (1 - \lambda) \check{\tau}^i$  met  $\lambda \in [0, 1]$ . Uit de lineariteit van  $u^i(\cdot, \sigma^{-i})$  volgt dan  $u^i(\tilde{\tau}^i, \sigma^{-i}) = \lambda u^i(\hat{\tau}^i, \sigma^{-i}) + (1 - \lambda) u^i(\check{\tau}^i, \sigma^{-i})$  en dus dat  $\tilde{\tau}^i \in BR^i(\sigma^{-i})$ .
- (c) als  $\exists \sigma^i \in BR^i(\sigma^{-i}) : \sigma^i(k) > 0 \Rightarrow k \in BR^i(\sigma^{-i})$ : Dit betekent dat  $u^i(k, \sigma^{-i}) = u^i(\sigma^i, \sigma^{-i})$ , het maximum, ook voor  $k$  wordt bereikt. Stel nu dat dit niet zou gelden, namelijk  $u^i(k, \sigma^{-i}) < u^i(\sigma^i, \sigma^{-i})$ . Dan zou echter  $u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \sum_{l=1}^{N^i} u^i(l, \sigma^{-i}) \sigma^i(l)$  groter kunnen gemaakt worden door het gewicht  $\sigma(k) = 0$  te stellen. Dit is echter in tegenspraak met de veronderstelling dat  $\sigma^i \in BR^i(\sigma^{-i})$ , waaruit het gestelde volgt.  $\square$

Het individuele beste antwoord is dus ofwel één zuivere strategie, ofwel een compacte en convexe verzameling bepaald door zuivere strategieën. Aangezien er slechts een eindig aantal strategieën zijn in  $S^i$  zal ook het aantal verschillende convexe combinaties van  $s^i \in S^i$  eindig zijn. Dit betekent dat voor elk eindig spel er slechts een eindig aantal verschillende beste antwoorden mogelijk zijn.



**Figuur 2.5:** Illustratie van het niet convex zijn van  $BR^i(M)$ .

Als we een strategieprofiel  $\sigma = (\sigma^i, \sigma^{-i})$  beschouwen dan is het *beste antwoord* hierop

$$BR(\sigma) = BR^i(\sigma^{-i}) \times BR^{-i}(\sigma^i),$$

met  $BR(\sigma) \subseteq \Sigma$ . De convexiteit van  $BR(\sigma)$  is een direct gevolg van stelling 2.1. Het cartesisch product van convexe verzamelingen is namelijk convex.

Als we niet enkel naar één strategie van de tegenspeler kijken, maar naar een gesloten deelverzameling  $M \subseteq \Sigma^{-i}$ , dan noteren we de verzameling van individuele beste antwoorden op strategieën in  $M$  als volgt

$$BR^i(M) = \bigcup_{\sigma^{-i} \in M} BR^i(\sigma^{-i}).$$

Als eindige unie van compacte deelverzamelingen van  $\Sigma^i$  is  $BR^i(M)$  ook compact. Het is echter niet zo dat  $BR^i(M)$  als unie van convexe deelverzamelingen ook convex moet zijn. Dit wordt geïllustreerd aan de hand van figuur 2.5. Deze figuur geeft de opbrengst van speler 2 in functie van de door speler 1 gespeelde strategie  $\sigma^1$  (met  $N^1 = 2$ ). Dit werd gedaan voor de drie zuivere strategieën van speler 2. We hebben dan als individuele beste antwoord

$$BR^2(\sigma^1) = \begin{cases} (0, 0, 1), & \forall \sigma^1 \in [(1, 0), \rho^1), \\ (0, \lambda, 1 - \lambda), \lambda \in [0, 1], & \sigma^1 = \rho^1, \\ (0, 1, 0), & \forall \sigma^1 \in (\rho^1, \tau^1), \\ (\lambda, 1 - \lambda, 0), \lambda \in [0, 1], & \sigma^1 = \tau^1, \\ (1, 0, 0), & \forall \sigma^1 \in (\tau^1, (0, 1)]. \end{cases}$$

Als we bijvoorbeeld  $M = \Sigma^1$  nemen zien we dus dat  $BR^2(\Sigma^1)$  wel de strategieën 1 en 3 bevat, maar geen convexe combinatie van beiden. We kunnen uit de

figuur echter ook opmaken dat elke  $BR^i(M)$  die juist twee zuivere strategieën bevat noodzakelijkerwijs convex is.

Verder zullen we de term beste antwoord ook gebruiken voor het individuele beste antwoord, aangezien dit door de notatie niet tot verwarring leidt.

### 2.3.2 Niet-coöperatief evenwicht

Gezien de grote variatie aan spelen kunnen we verwachten dat er ook een variatie is in het type evenwichtspunten. Wij zijn hier geïnteresseerd in het type dat kan optreden bij spelen zonder samenwerking, dat hieronder gedefinieerd wordt.

#### **Definitie 2.11 (niet-coöperatief evenwicht)**

*Dit is een situatie waarbij geen enkele speler een grotere opbrengst zou hebben gekregen bij de keuze van een andere strategie, indien de strategie van de andere speler niet verandert. Een strategieprofiel  $\sigma_* = (\sigma_*^i, \sigma_*^{-i}) \in \Sigma$  is dus een niet-coöperatief evenwicht<sup>15</sup> als en slechts als*

$$u^i(\sigma_*) \geq u^i(\sigma^i, \sigma_*^{-i}), \forall \sigma^i \in \Sigma^i, \forall i \in M$$

of equivalent (zie hiervoor [1, H2 §4.1])

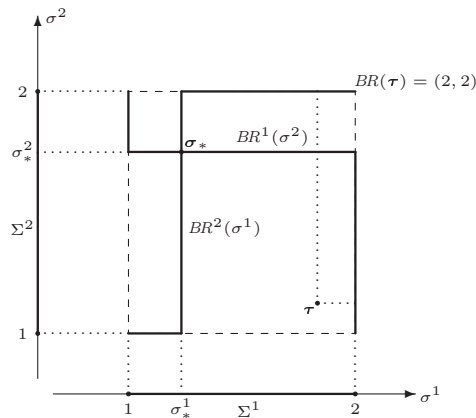
$$\sigma_* \in BR(\sigma_*).$$

Aangezien dit het enige type evenwicht is dat we zullen beschouwen, zullen we het verder ook kort evenwicht en evenwichtspunt noemen. We spreken van een *strikt evenwicht* indien  $\sigma_* = BR(\sigma_*)$ . Uit stelling 2.1 volgt dan dat dit een uniek zuiver strategieprofiel  $s_*$  is. Bemerkt dat er in een spel meerdere evenwichten kunnen bestaan, zowel strikte als gemengde. Het blijkt zelfs zo te zijn dat er ofwel een continuüm aan evenwichten is, ofwel een oneven eindig aantal (zie [2, §1.7.3]).

Het voorbeeld in tabel 2.2 heeft als evenwicht  $(\sigma^1, \sigma^2)$ , met  $\sigma^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  en  $\sigma^2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . In [4] wordt uitgelegd hoe er praktisch gezocht kan worden naar evenwichten; wij zullen er hier niet op ingaan.

Dit is het ideale moment om een aantal zaken die we hebben gezien te illustreren. Beschouw hiervoor figuur 2.6. Hierop staan, voor een hypothetisch tweepersoonspel ( $N^1 = 2 = N^2$ ) met een gemengde strategie  $\sigma_*$  als uniek evenwicht, de beste antwoorden afgebeeld. We kunnen er de eigenschappen van  $BR^i$  vermeld in stelling 2.1 op aflezen. We kunnen ook zien dat inderdaad  $\sigma_*$  de enige strategie is waarvoor geldt dat  $\sigma_* \in BR(\sigma_*) (= \Sigma)$ , voor alle andere strategieën is  $BR(\tau) = (k, l)$ , een zuiver strategieprofiel dus.

15. Ook Nash-Cournot evenwicht genoemd en niet te verwarren met het coöperatieve Nash evenwicht.



**Figuur 2.6:** Beste antwoorden en evenwicht voor een spel met  $N^1 = 2 = N^2$ .

De voorstellingswijze die we in het bovenstaande voorbeeld gebruikt hebben is nuttig in verschillende opzichten. Ten eerste hoeven we niet expliciet een bepaalde opbrengstmatrix geven (alhoewel er altijd een kan worden gevonden die ermee correspondeert). Verder laat het ons onmiddellijk toe het aantal evenwichten en hun relatieve positie af te lezen (via de  $BR^i$ -relaties). Ook is het mogelijk om er concepten en specifieke spelsituaties eenvoudig mee te visualiseren en eventueel mee te analyseren. De belangrijkste beperking is vanzelfsprekend dat ze enkel bruikbaar is wanneer  $N^1 = 2 = N^2$ . We zullen ze verder vooral in hoofdstuk 6 tegenkomen.

### 2.3.3 Bereikbare opbrengsten en Pareto-optimaliteit

Gezien de compactheid en convexiteit van alle  $\Sigma^{i'}$ 's en de continuïteit en lineariteit van  $u^i$  is de verzameling van *bereikbare opbrengsten*

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}) \mid \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma\}$$

noodzakelijkerwijs ook compact (continuïteit) en convex (lineariteit). De bereikbare opbrengsten vormen dus een gesloten interval van  $\mathbb{P}$ .

Een opbrengstvector is *Pareto-optimaal* indien er geen andere bereikbare opbrengstvector bestaat met een hogere opbrengst voor elke speler. De verzameling van Pareto-optimale opbrengstvectoren wordt dan

$$\mathbf{H}_* = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{H} \Rightarrow \exists i \in M : u^i \geq v^i\}.$$

We noemen de strategie behorend bij een Pareto-optimale opbrengstvector ook Pareto-optimaal.

We zien dat evenwichten niet per definitie Pareto-optimaal zijn en omgekeerd hoeft een Pareto-optimale strategie geen evenwicht te zijn (kijk b.v. naar het voorbeeld van het dilemma van de gevangenen in §2.3.4).

**Tabel 2.3:** Illustratie van dominantie.

s	$1^2$	2	3	$4^{\tau^2}$	5
1	(2, -2)	(1, -1)	(-1, 1)	(-1.2, 1.2)	(-2, 2)
2	(1, -1)	(-2.2, 2.2)	(-2, 2)	(-1.2, 1.2)	(-1, 1)

### 2.3.4 Dominantie

In bepaalde gevallen kan men een spel vereenvoudigen door te bepalen welke strategieën niet zullen worden gespeeld.

#### **Definitie 2.12 (strikte dominantie)**

Voor speler  $i$  is  $\tau^i$  een strikt gedomineerde strategie indien

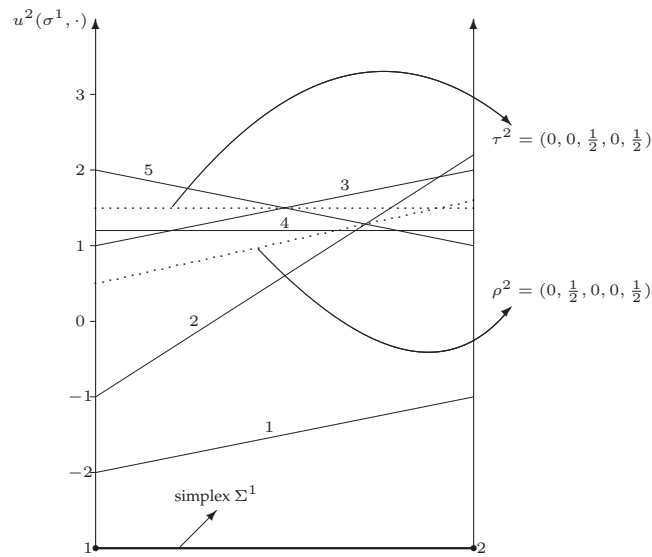
$$\exists \sigma^i \in \Sigma^i : u^i(\sigma^i, \tau^{-i}) > u^i(\tau^i, \tau^{-i}), \forall \tau^{-i} \in \Sigma^{-i}.$$

We noteren  $\tau^i \prec \sigma^i$  en  $\sigma^i \succ \tau^i$  als  $\tau^i$  strikt wordt gedomineerd door  $\sigma^i$ .

Bemerk dat het mogelijk is dat een zuivere strategie gedomineerd wordt door een gemengde strategie, zonder dat deze wordt gedomineerd door een andere zuivere strategie. Omgekeerd wordt elke gemengde strategie  $\sigma^i$ , met een gewicht verschillende van nul voor een gedomineerde strategie, gedomineerd. Namelijk door de strategie die men bekomt door in  $\sigma^i$  eerst de gewichten van de gedomineerde strategieën op nul te stellen en daarna opnieuw te normaliseren. Het is zelfs zo dat een gemengde strategie gedomineerd kan worden ook al plaatst ze geen gewicht op een gedomineerde zuivere strategie.

Als men een gedomineerde strategie tegenkomt in een opbrengstmatrix van een spel, kunnen we deze meestal schrappen, gezien ze door een (rationele) speler bijna nooit gekozen zal worden. Het kan gebeuren dat, nadat er door beide spelers één of meer strategieën geschrapt werden, in de gereduceerde opbrengstmatrix weerom een aantal strategieën geschrapt kunnen worden. Dit noemt men dan *herhaalde strikte dominantie*.

Het voorgaande kan verhelderd worden door enkele voorbeelden te geven. In tabel 2.3 tonen we een spel waarbij speler 2 twee strategieën kan schrappen omdat ze gedomineerd worden, bij deze twee werd een dominerende strategie aangebracht als bovenindex. De gebruikte notatie definieerden we in figuur 2.7. Hierin zetten we de opbrengst van speler 2 uit als functie van de strategie van speler 1. Dit deden we voor alle zuivere en voor twee gemengde strategieën ( $\tau^2$  en  $\rho^2$ ) van speler 2. We kozen  $\tau^2$  om dominantie door een gemengde strategie van een zuivere strategie (4) weer te geven (bovendien is  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \tau^2$  het evenwichtspunt). Evenzo kozen we  $\rho^2$  om te tonen dat een gemengde strategie, met enkel gewichten verschillend van nul voor niet-gedomineerde strategieën, ook gedomineerd kan worden.



**Figuur 2.7:** Illustratie van dominantie.

In tabel 2.4 geven we een voorbeeld van herhaalde strikte dominantie. In dit spel is het evenwicht  $\sigma^1 = (0, \frac{9}{13}, \frac{4}{13})$  en  $\sigma^2 = (\frac{1}{15}, 0, \frac{14}{15}, 0, 0)$ .

Dat het niet altijd aangewezen is om gedomineerde strategieën te schrappen is te zien in tabel 2.5, een spel dat *het dilemma van de gevangenen*<sup>16</sup> wordt genoemd. In dit spel is voor beide spelers namelijk strategie 2 dominant, maar het strategieprofiel (1, 1) is Pareto-optimaal en het evenwicht (2, 2) niet. Dit is de reden waarom men van een dilemma spreekt.

Het concept van dominantie kan nog uitgebreid worden tot strategieën die voor bepaalde strategieën van de tegenspeler een gelijke opbrengst geven.

**Definitie 2.13 (zwakke dominantie)**

Voor speler  $i$  is  $\tau^i$  een zwak gedomineerde strategie indien

$$\exists \sigma^i \in \Sigma^i \setminus \{\tau^i\} : u^i(\sigma^i, \tau^{-i}) \geq u^i(\tau^i, \tau^{-i}), \forall \tau^{-i} \in \Sigma^{-i},$$

met strikte ongelijkheid voor minstens één  $\tau^{-i}$ .

We noteren  $\tau^i \preceq \sigma^i$  en  $\sigma^i \succeq \tau^i$  als  $\tau^i$  zwak wordt gedomineerd door  $\sigma^i$ .

Net zoals bij strikte dominantie zal een speler meestal geen zwak gedomineerde strategie kiezen. *Herhaalde zwakke dominantie* is echter een proble-

16. De spelers zijn twee arrestanten die samen een overval gepleegd hebben, voor beiden staat strategie 1 voor ontkennen en strategie 2 voor bekennen. Voor de strategieprofielen (1, 2) en (2, 1) wordt de speler die strategie 1 koos daarenboven verraden door zijn ex-kompaan. De opbrengst bestaat hier b.v. uit jaren gevangenisstraf.

**Tabel 2.4:** Een voorbeeld van herhaalde strikte dominantie.

s	1	2	3	4	5
$1^2$	(3, -3)	(5, -5)	(-2, 2)	(2, -2)	(1, -1)
2	(3.5, -3.5)	(6, -6)	(-1, 1)	(2.5, -2.5)	(4, -4)
3	(4, -4)	(3, -3)	(6, -6)	(7, -7)	(8, -8)

↓

s	1	2	3	$4^3$	$5^3$
2	(3.5, -3.5)	(6, -6)	(-1, 1)	(2.5, -2.5)	(4, -4)
3	(4, -4)	(3, -3)	(6, -6)	(7, -7)	(8, -8)

↓

s	1	2	3
2	(3.5, -3.5)	(6, -6)	(-1, 1)
3	(4, -4)	(3, -3)	(6, -6)

**Tabel 2.5:** Het dilemma van de gevangenen.

s	$1^2$	2
$1^2$	(-2, -2)	(-5, -1)
2	(-1, -5)	(-3, -3)

matisch concept (zie [2, §1.7.2]) en het schrappen van strategieën is dus af te raden.

### 2.3.5 Het bestaan van evenwichten

Het is nuttig om te weten of we kunnen verwachten dat er in de spelen die we beschouwen al dan niet een evenwicht te vinden is. Vandaar volgende stelling.

#### **Stelling 2.2 (bestaan van evenwichten)**

Een tweepersoonsspel zonder samenwerking waarvoor voor alle  $i \in M$

- (a)  $\Sigma^i$  compact en convex is,
  - (b)  $u^i(\sigma)$  continu is en gedefinieerd voor alle  $\sigma \in \Sigma$ ,
  - (c)  $u^i(\cdot, \sigma^{-i})$  een lineaire functie is van  $\sigma^i \in \Sigma^i$  en dit voor alle  $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$ ,
- en waarbij de spelers hun strategie tegelijkertijd kiezen, bezit op zijn minst één evenwichtspunt, i.e.

$$\exists \sigma_* \in \Sigma \text{ waarvoor } \sigma_* \in BR(\sigma_*).$$

Om deze stelling te bewijzen zullen we eerst nog enkele andere definities en een nodige stelling geven.

Beschouw een relatie  $R$  in  $\mathbb{R}^N$  en gebruik de volgende notatie (met  $x \in \mathbb{R}^N$ )

$$R(x) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid xRy\}.$$

We noemen dan  $x \in \mathbb{R}^N$  een *dekpunt* van de relatie  $R$ , indien  $x \in R(x)$ . We noemen een relatie  $R$  *boven-semicontinu* indien de grafiek van  $R$  gesloten is (zie [1, H2 §4.2]).

#### **Stelling 2.3 (dekpuntstelling van Kakutani)**

Beschouw een boven-semicontinue relatie  $R$  waarvoor  $\text{dom}(R) = X \subset \mathbb{R}^N$ . Indien

- (a)  $X$  compact en convex is,
- (b)  $X \supseteq R(x) \neq \{\emptyset\}, \forall x \in X$ ,
- (c)  $R(x)$  is convex,

dan bezit  $R$  een dekpunt, i.e.

$$\exists x_* \in X \text{ waarvoor } x_* \in R(x_*).$$

**Bewijs van stelling 2.3** Zie hiervoor [15, p.174] of een gelijkaardig referentiewerk. □

Nu zijn we bijna gewapend om het bestaan van evenwichtspunten in de door ons beschouwde spelen aan te tonen. Hiervoor moet ik nog wijzen op



het boven-semicontinu zijn van de relatie  $BR$  (zie [1, H2 §4.3] voor het bewijs hiervan).

**Bewijs van stelling 2.2** Dit bewijs is aangepast uit [1, H2 §4.4]. We wensen de dekpuntstelling van Kakutani toe te passen, aangezien een evenwichtspunt niets anders is dan een dekpunt van de  $BR$ -relatie. Hiervoor maken we de volgende identificaties

$$\begin{aligned} R &\leftrightarrow BR, & X &\leftrightarrow \Sigma, \\ N &\leftrightarrow N^i \times N^{-i}, & x_* &\leftrightarrow \sigma_*. \end{aligned}$$

We zullen nu stap voor stap alle voorwaarden bewijzen.

- (a)  $\Sigma$  is compact en convex: Dit werd reeds aangetoond in §2.2.5 en geïllustreerd in figuur 2.4.
- (b)  $\Sigma \supseteq BR(\sigma) \neq \{\emptyset\}, \forall \sigma \in \Sigma$ : Beschouw hiervoor opnieuw definitie 2.10 met  $BR^i(\sigma^{-i}) = \{\sigma^i \in \Sigma^i \mid u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \max_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \sigma^{-i})\}$ . Er bestaan zulke  $\sigma^i$  aangezien het diegene zijn die een continue functie  $u^i(\cdot, \sigma^{-i})$ , bepaald op een compact domein  $\Sigma^i$ , maximaliseren. Deze  $\sigma^i$  zijn bovendien door constructie elementen van  $\Sigma^i$ . Aangezien verder volgt uit  $\sigma \in BR(\tau)$  dat  $\sigma^i \in BR^i(\tau^{-i}), \forall i \in M$  is  $BR(\sigma)$  gedefinieerd voor alle  $\sigma \in \Sigma$  en is ook  $BR(\sigma) \subseteq \Sigma$ . Hierdoor is aan deze voorwaarde voldaan.
- (c)  $BR(\sigma)$  is convex: Deze laatste voorwaarde is niets anders dan het gevolg van stelling 2.1 vermeld in §2.3.1.

Het gestelde is dan bewezen. Elk spel dat aan de voorwaarden voldoet heeft dus op zijn minst één evenwichtspunt.  $\square$

We zijn niet geïnteresseerd in de uniciteit van een evenwicht. In hoofdstuk 6 zal blijken dat de voor ons meest interessante spelen deze zijn waar er geen uniek evenwicht is, of waar het evenwicht onbekend is voor de spelers.

### 2.3.6 Spelen met tegengestelde belangen

Om dit hoofdstuk af te sluiten behandelen we nog een specifiek type spelen. Namelijk deze waarbij de belangen van de spelers tegengesteld zijn. Dit doen we omwille van enkele interessante hieraan verbonden concepten.

*Spelen met tegengestelde belangen* voldoen aan de voorwaarden voor stelling 2.2 en worden verder gekenmerkt door

$$u^i(\hat{\sigma}) \geq u^i(\check{\sigma}) \Leftrightarrow u^{-i}(\hat{\sigma}) \leq u^{-i}(\check{\sigma}), \forall \hat{\sigma}, \check{\sigma} \in \Sigma.$$

Een interessante eigenschap van deze spelen is dat alle evenwichtspunten dezelfde opbrengst hebben en een convexe deelverzameling van  $\Sigma$  vormen. Dit wordt aangetoond in [1, H2 §3.1]. Het eenvoudigste type binnen deze spelen zijn de zogenaamde *constantesomspelen*, met

$$u^i(\sigma) = c - u^{-i}(\sigma), c \in \mathbb{P}, \forall \sigma \in \Sigma.$$

Indien  $c = 0$  spreekt men van een *nulsomspel*. Het spel in tabel 2.2 heeft een constante som  $c = 1$  en in de tabellen 2.3 en 2.4 staan nulsomspelen. Het spel in figuur 2.6 is er ook een met tegengestelde belangen.

In spelen met tegengestelde belangen moet er door elke speler vanuit worden gegaan dat zijn tegenspeler zijn opbrengst wil minimaliseren. Zijn tegenspeler zal dit namelijk doen om zijn eigen opbrengst te maximaliseren. Om in zo'n situatie nog het onderste uit de kan te halen zal hij een specifieke strategie gebruiken. Deze wordt hieronder gedefinieerd.

**Definitie 2.14 (maximin-strategie)**

Een maximin-strategie is een  $\sigma^i \in \Sigma^i$  waarvoor

$$\sigma^i = \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} \min_{\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}).$$

Bemerk dat er geen unieke maximin-strategie hoeft te zijn.

Een evenwicht bij spelen met tegengestelde belangen komt overeen met een strategieprofiel waarbij beide spelers een maximin-strategie spelen (als ze dit niet doen en hun tegenspeler wel, spelen ze minder dan optimaal).<sup>17</sup> De opbrengst die hoort bij zo'n evenwicht wordt dan

$$v^i = \max_{\tau^i \in \Sigma^i} \min_{\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}).$$

Bij nulsomspelen noemt men  $v = |v^i|$  de *waarde* van het spel.

We illustreren de keuze voor een maximin-strategie in figuur 2.8(a). We doen dit voor een nulsomspel. De grafiek van de opbrengstfunctie is een regeloppervlak, waarvan we twee paren voortbrengende rechten hebben afgebeeld (namelijk deze die overeenkomen met een zuivere strategie voor een van de spelers), die het regeloppervlak volledig bepalen. Het maximin-strategieprofiel  $\hat{\sigma}$  werd afgebeeld, alsook de overeenkomende waarde  $v$ . We zien in dat  $\hat{\sigma}$  het snijpunt is van de twee volgende krommen op het regeloppervlak (in vetjes op de figuur)

$$u_-^1(\sigma^1) = \min_{\sigma^2 \in \Sigma^2} u^1(\sigma^1, \sigma^2), \text{ met } v \text{ als maximum,}$$

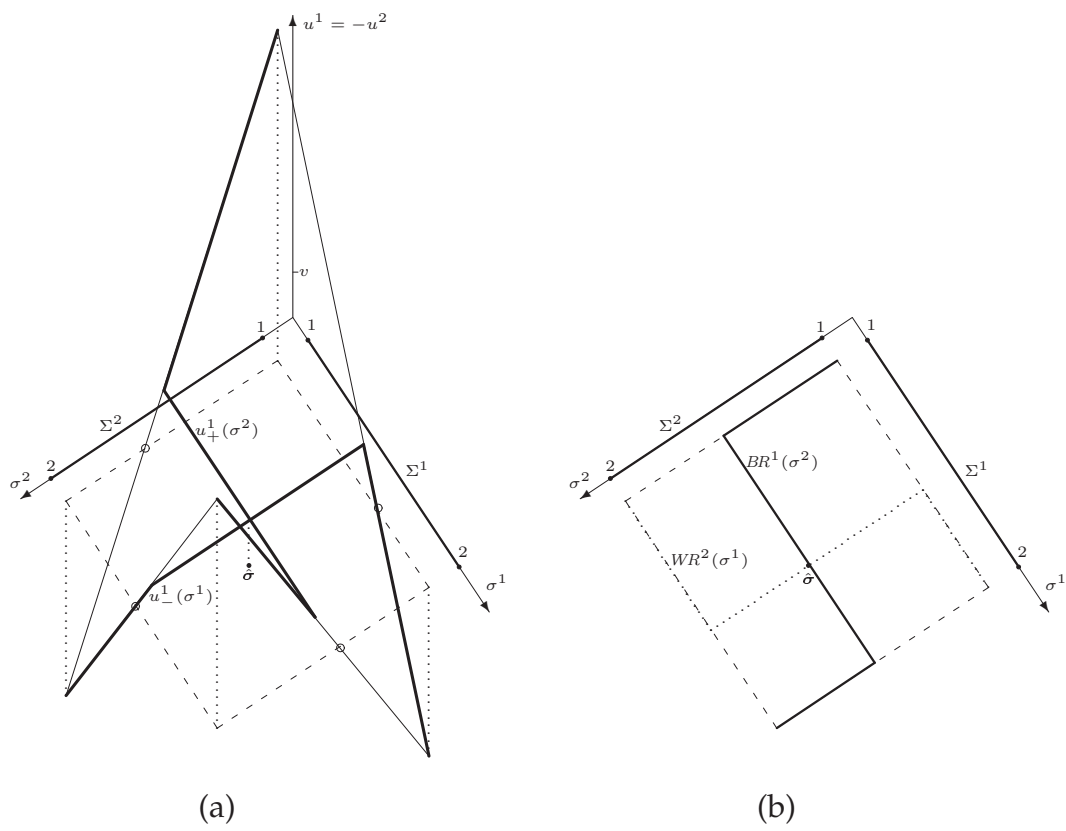
$$u_+^1(\sigma^2) = \max_{\sigma^1 \in \Sigma^1} u^1(\sigma^1, \sigma^2), \text{ met } v \text{ als minimum.}$$

In figuur 2.8(b) hebben we de extremerende strategieën van de hierboven vermelde krommen weergegeven, namelijk

$$WR^2(\sigma^1) = \operatorname{argmin}_{\sigma^2 \in \Sigma^2} u^1(\sigma^1, \sigma^2),$$

$$BR^1(\sigma^2) = \operatorname{argmax}_{\sigma^1 \in \Sigma^1} u^1(\sigma^1, \sigma^2).$$

17. Soms wordt de benaming zadelpuntevenwicht gebruikt.



**Figuur 2.8:** Illustratie bij maximin-strategieën ( $N^1 = 2 = N^2$ ).

Deze figuur toont dus het verband tussen maximin-strategieën en beste antwoorden. Bemerkt dat  $WR^2(\sigma^1) = BR^2(\sigma^1)$  voor het spel dat we hier beschouwen. Dit geldt echter niet algemeen, maar enkel voor spelen met tegengestelde belangen.

Bemerkt dat ook bij spelen waar de belangen niet tegengesteld zijn, we op zoek kunnen gaan naar maximin-strategieën, maar dat zulke strategieën daar niet noodzakelijk overeenkomen met een evenwicht. Ze kunnen er echter wel beschouwd worden als een veilige strategiekeuze.

We kunnen het concept maximin-strategie nog als volgt uitbreiden. Als een speler veronderstelt (of weet) dat zijn tegenspeler enkel een strategie zal spelen binnen een  $M \subseteq \Sigma^{-i}$  dan noemen we  $\sigma_M^i$  een *M-maximin-strategie* indien

$$\sigma_M^i = \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} \min_{\sigma^{-i} \in M} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}).$$

In het extreme geval van  $M = \{\sigma^{-i}\}$  is de  $\{\sigma^{-i}\}$ -maximin-strategie niets anders dan het beste antwoord  $BR^i(\sigma^i)$ .

In [6, proposition 1] wordt nog de volgende interessante stelling bewezen.

**Stelling 2.4**

Voor  $M \subseteq \Sigma^{-i}$ , met  $M$  compact en convex, vormen de *M-maximin-strategieën* een deelverzameling van  $BR^i(M)$ .

## 2.4 Bronvermelding

De voor dit hoofdstuk vooral gebruikte referenties waren [1], [2], [3] en [4]. Het eerste was het meest geraadpleegde werk, zowel voor §2.1, §2.2 als voor §2.3. Het tweede werk was van nut voor §2.3 en voor de keuze van notatie. De laatste twee leverden de Nederlandstalige terminologie en waren verder ook nuttig bij het opstellen van de voorbeelden. Verder is §2.2.2 gebaseerd op [5] en werden elementen uit [6] gebruikt in §2.3.1 en §2.3.6.

# Hoofdstuk 3

## Imprecieze waarschijnlijkheden

*“Probability does not exist.”*

– Bruno de Finetti, in *Theory of Probability*.

### 3.1 Inleiding

#### 3.1.1 Onzekerheid en onbepaaldheid

Als we redeneren is het belangrijk rekening te houden met onzekerheid en met onvolledige kennis. Om onzekerheid te meten hebben we een soort waarschijnlijkheden nodig (b.v. deze waarmee de meesten onder ons vertrouwd zijn: *precieze waarschijnlijkheden*). Door de onvolledigheid van onze kennis hebben we te maken met onbepaaldheid. Om bij onze meting van onzekerheid ook met die onbepaaldheid rekening te houden hebben we *imprecieze waarschijnlijkheden*<sup>1</sup> nodig.

In beslissingsproblemen, waar er bepaalde keuzes moeten gemaakt worden (welke strategie te spelen b.v.), kunnen voorkeuren bepaald worden door imprecieze inschattingen van waarschijnlijkheden en nut te combineren. Wij zullen hierbij veronderstellen dat nut altijd precies bepaald is (zie definitie 2.2).

Een gevolg van het gebruiken van imprecieze waarschijnlijkheden is dat een probabilistische redenering<sup>2</sup> onbepaalde conclusies kan leveren en dat we in beslissingsproblemen onbeslist kunnen blijven. Hiermee in tegenstelling zal er bij het gebruik van precieze waarschijnlijkheden altijd een welbepaalde conclusie bereikt worden of een welbepaalde beslissing genomen worden. Dit is zelfs zo indien er maar weinig of onbetrouwbare gegevens beschikbaar zijn.

---

1. De term imprecieze waarschijnlijkheden wordt hier als verzamelnaam gebruikt voor een reeks onzekerheidsmodellen. We zullen de term verder ook gebruiken voor één bepaald onzekerheidsmodel.

2. Een probabilistische redenering is een redenering waarbij we gebruik maken van een onzekerheidsmodel.

Het is nuttig om op te merken dat het onzekerheidsmodel dat we hier beschouwen, datgene is dat de spelers<sup>3</sup> zullen gebruiken.

### 3.1.2 Interpretatie

Een duidelijke interpretatie van het gebruikte onzekerheidsmodel is noodzakelijk voor de rechtvaardiging van de gebruikte uitgangspunten en rekenregels. Verder is deze interpretatie ook daar nodig waar we het onzekerheidsmodel gebruiken. We zullen beginnen met een classificatie te geven van de verschillende mogelijke interpretaties.

Het belangrijkste onderscheid is dat tussen *statistische waarschijnlijkheden*, die willekeur van empirische fenomenen weergeeft, en *epistemische waarschijnlijkheden*, die de sterkte van een overtuiging op basis van kennis en informatie weergeeft (overtuiging wordt hier niet als iets noodzakelijk menselijks gezien, maar duidt op de overtuiging van de speler). De uitspraak “deze munt heeft een kans  $p$  om na te zijn opgeworpen op zijn kant te blijven liggen” drukt statistische waarschijnlijkheid uit, aangezien ‘kans’ wijst op een fysische eigenschap, die onafhankelijk is van de waarnemer. Anderzijds drukt de uitspraak “ik geloof niet dat deze munt ooit op zijn kant zal blijven liggen na te zijn opgeworpen” epistemische waarschijnlijkheid uit, aangezien ze verwijst naar een persoonlijke overtuiging. Onze interpretatie is epistemisch. Statistische en epistemische waarschijnlijkheden zijn verbonden door het *principe van rechtstreekse gevolgtrekking*: wanneer de speler de waarden van statistische waarschijnlijkheden (die precies zijn) kent moet hij ze aanvaarden als epistemische waarschijnlijkheden en ernaar handelen. Als de kans dat een vliegtuig neerstort 0.99 is, dan mag de speler er niet opstappen als hij ongedeerd ter bestemming wil geraken.

Aangezien epistemische waarschijnlijkheden (verder kort waarschijnlijkheden genoemd) afhangen van de beschikbare gegevens, is het nuttig volgende onderverdeling te maken. In een *logische* interpretatie wordt een unieke waarschijnlijkheid volledig bepaald door de beschikbare gegevens. In een *personalistische* interpretatie daarentegen wordt een waarschijnlijkheid louter bepaald door coherentie-axioma's en niet door de gegevens (waarschijnlijkheid bestaat als het ware enkel in de geest van de speler). Onze interpretatie zal hier tussenin liggen. Ze vereist dus dat waarschijnlijkheden in bepaalde mate consistent zijn met de beschikbare gegevens, zonder uniek bepaald te moeten zijn. Ze wordt de *rationalistische* interpretatie genoemd.

Binnen de epistemische interpretaties kunnen we nog een verder onderscheid maken. Namelijk dit tussen een *gedragsgerichte* interpretatie, waarin waarschijnlijkheden worden geïnterpreteerd in functie van gedrag, en een *gegevensgerichte* interpretatie, waarin de waarschijnlijkheid van een hypothese

---

3. We hebben het hier over dezelfde spelers als in hoofdstuk 2.

een logisch of linguïstisch verband meet tussen de hypothese en de beschikbare gegevens. Wij zullen een gedragsgerichte interpretatie gebruiken waarbij we zullen kijken naar het gokgedrag van de spelers.

Het vorige onderscheid behandelde de betekenis van de waarschijnlijkheden. Om de waarschijnlijkheden te meten kunnen we dit doen door *observatie* van factoren die worden beïnvloed door deze waarschijnlijkheden of door *constructie* uit de factoren waardoor ze worden beïnvloed. We kunnen waarschijnlijkheden dus meten respectievelijk door ze te verkrijgen uit observaties of door ze in te schatten. Wij kiezen voor de tweede mogelijkheid.

Een voor ons minder belangrijk onderscheid is dat tussen een *operationalistische* interpretatie (waarin waarschijnlijkheden worden geïdentificeerd met observaties bekomen door middel van een specifieke procedure) en een *theoretische* interpretatie (waarin waarschijnlijkheden staan voor onderliggende theoretische concepten die niet rechtstreeks te observeren zijn). Wij gebruiken de theoretische interpretatie.

Onze interpretatie van waarschijnlijkheden zal dus epistemisch, rationalistisch, gedragsgericht, constructief (inschatten) en theoretisch zijn. Rationalistisch (i.t.t. personalistisch), opdat de conclusies niet geheel subjectief en willekeurig zouden zijn en gedragsgericht, zodat we zouden weten hoe de conclusies te gebruiken.

### 3.1.3 Precieze tegenover imprecieze waarschijnlijkheden

Net zoals de precieze – Bayesiaanse – waarschijnlijkheden is het doel van imprecieze waarschijnlijkheden toe te laten in redeneringen rekening te houden met onzekerheid. Het grote verschil is dat imprecieze waarschijnlijkheden rekening kunnen houden met onbepaaldheid en dat daarentegen in het precieze geval het *Bayesiaanse dogma van precisie* wordt gehuldigd (de pejoratieve benaming komt uit [7]). Dit dogma zegt dat onzekerheid altijd moet worden gemeten door één getal en dat dit getal de informatie weerspiegelt die de speler heeft.

Er bestaat reeds een redelijk lange geschiedenis van kritiek op Bayesiaanse precieze waarschijnlijkheden. Reeds in de 19<sup>e</sup> eeuw stelde Boole (in [16]) een model op van imprecieze epistemische waarschijnlijkheden. Begin 20<sup>e</sup> eeuw ondernam ook Keynes (in [17]) een poging voor het opstellen van een theorie van imprecieze waarschijnlijkheden. De in §3.1.4 uiteengezette rationaliteitsprincipes werden ingevoerd door Smith in [5]. Een belangrijke synthese werd uiteindelijk gemaakt door Walley in [7], dit laatste werk was dan ook dé bron voor dit hoofdstuk.

In [7] wordt de noodzaak van imprecieze waarschijnlijkheden zeer uitgebreid besproken. Voor ons is het belangrijkste argument dat de mate van im-

precisie de hoeveelheid beschikbare informatie weerspiegelt. Zo zal het mogelijk zijn waarschijnlijkheden gebaseerd op uitgebreide gegevens te onderscheiden van die gebaseerd op onwetendheid.

### 3.1.4 Rationaliteit

Algemeen gesteld kunnen we zeggen dat *redeneren*, dus ook probabilistisch redeneren, een proces is dat gericht is op het oplossen van problemen, het komen tot conclusies en het beslissen. *Rationaliteit* is het geheel van standaarden en normen voor het leiden en beoordelen van redeneringen. Een oplossing, conclusie of beslissing is rationeel indien ze het gevolg is van een redeneerproces dat voldoet aan deze normen. Een speler is rationeel indien hij rationeel redeneert.

We onderscheiden twee types rationaliteit. Het eerste type, *interne rationaliteit* heeft te maken met zelf-consistentie en kan met behulp van de twee hierna gedefinieerde concepten worden geformuleerd.

#### **Definitie 3.1 (zeker verlies vermijden)**

*Een speler vermijdt zeker verlies indien er geen eindige reeks gokken bestaat die hij elk apart bereid is aan te gaan, maar waarvan de combinatie zeker zorgt voor een netto verlies aan nut. In het andere geval zal hij zeker verlies maken.*

Zo is het bijvoorbeeld duidelijk irrationeel voor een speler om intransitieve voorkeuren te hebben zoals  $X$  verkiezen boven  $Y$ ,  $Y$  boven  $Z$  en  $Z$  boven  $X$ . Dit betekent namelijk dat hij  $X + \varepsilon$  wil ruilen voor  $Z$  (waar  $\varepsilon > 0$  een bepaalde hoeveelheid nut voorstelt), analoog  $Z + \varepsilon$  voor  $Y$  en  $Y + \varepsilon$  voor  $X$ , of  $X + 3\varepsilon$  voor  $X$ .

#### **Definitie 3.2 (coherentie)**

*Een speler is coherent indien er geen eindige reeks gokken bestaat die hij elk apart bereid is aan te gaan, waarvan de combinatie een netto opbrengst heeft die even groot is als een andere gok die hij niet bereid is aan te gaan. In het andere geval is hij incoherent.*

Indien een speler  $X$  verkiest boven  $Y$  en  $Y$  boven  $Z$ , dan vereist coherentie dat hij ook  $X$  verkiest boven  $Z$  (i.t.t. b.v. onverschillig te blijven tussen beide, wat het minimum is dat zeker verlies vermijden vereist).

We zien dat coherentie een strengere vereiste is dan zeker verlies vermijden. Het is mogelijk om uit een reeks inschattingen (die zeker verlies vermijden) over bepaalde gebeurtenissen coherente waarschijnlijkheden voor die gebeurtenissen op te stellen. De methode waarmee dit gebeurt wordt *natuurlijke uitbreiding* genoemd. We zullen hier in §3.3.5 kort op ingaan.



Het tweede type rationaliteit, *externe rationaliteit*, slaat op het verband tussen de gegevens en de waarschijnlijkheden. Externe rationaliteit kan worden geformuleerd door enkele principes, zoals bijvoorbeeld symmetrieprincipes (een symmetrie in beschikbare gegevens moet worden weerspiegeld in een overeenkomende symmetrie in waarschijnlijkheden), het principe van rechtstreekse gevolgtrekking (zie §3.1.2), onafhankelijkheidsprincipes (waarschijnlijkheden van onafhankelijke gebeurtenissen moeten onafhankelijk zijn) en het onwetendheidsprincipe (de precisie van waarschijnlijkheden moet overeenkomen met de hoeveelheid informatie waarop ze gebaseerd zijn). Deze principes van externe rationaliteit zijn spijtig genoeg niet altijd direct toepasbaar (i.e. ze zijn moeilijk te formaliseren).

## 3.2 Basisdefinities

### 3.2.1 Mogelijke toestanden

We beschouwen een verzameling  $\Omega$  van *mogelijke toestanden*  $\omega$ . Elke toestand kan een mogelijke uitslag zijn van een experiment of observatie. Het kan ook een gebeurtenis of een welbepaald feit zijn. Bijvoorbeeld kunnen we over de kleur van eieren zeggen dat  $\Omega = \{\text{wit, bruin}\}$ .

We vereisen dat de verschillende toestanden elkaar uitsluiten (er bestaan geen bruine witte eieren) en dat altijd één van de toestanden optreedt (er bestaan enkel bruine en witte eieren). In sommige gevallen zullen we genoodzaakt zijn een mogelijkheid ‘andere mogelijkheden’ toe te voegen (door een bizar dieet legt onze kip b.v. paarse eieren). We noemen deelverzamelingen van  $\Omega$  *gebeurtenissen*. We kunnen voor een andere partij eieren bijvoorbeeld schrijven dat

$$\Omega_{\text{effen}} = \{\text{wit, bruin}\} \subset \Omega = \{\text{wit, bruin, gespikkeld}\}.$$

Het is belangrijk dat het mogelijk is om de *ware toestand* te bepalen (die we in de gevallen die ons interesseren dus nog niet kennen), bijvoorbeeld om een weddenschap te beslechten. We kiezen bijvoorbeeld geblinddoekt een ei uit ons mandje.

### 3.2.2 Gokken

#### **Definitie 3.3 (gok)**

*Een gok is een functie*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{P} : \omega \rightarrow X(\omega).$$

*Een gok moet geïnterpreteerd worden als een opbrengst, waarvan de waarde afhangt van de onzekere toestand  $\omega$ .*

Wanneer een speler een gok aanvaardt, dan zal op een later ogenblik de ware toestand bepaald worden en zal de speler een opbrengst  $X(\omega)$  krijgen.

De verzameling van alle gokken op  $\Omega$  duiden we aan met  $\mathcal{L}(\Omega)$ . Deze verzameling is een lineaire reële ruimte en heeft dus als eigenschappen

$$\begin{aligned} \exists \mu \in \mathcal{L}(\Omega) : \mu(\omega) = \mu, \forall \omega \in \Omega \text{ (constante gokken),} \\ (\alpha X)(\omega) = \alpha X(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{L}(\Omega), \\ (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall X, Y \in \mathcal{L}(\Omega). \end{aligned}$$

Dus  $X + \mu$  is de gok  $(X + \mu)(\omega) = X(\omega) + \mu$ . We schrijven verder ook

$$X \geq Y \Leftrightarrow X(\omega) \geq Y(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

We kunnen ons afvragen welke gokken onze speler wel of niet zal aanvaarden, we kunnen hiervoor volgende *gegeerdheidsaxioma's* (overgenomen uit [7, §2.2.3]) vooropstellen (ze drukken de rationaliteit van de speler uit):

- (G1) Indien  $\sup_{\omega \in \Omega} X(\omega) < 0$  dan is  $X$  niet gegeerd.
- (G2) Indien  $\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) > 0$  dan is  $X$  gegeerd.
- (G3) Indien  $X$  gegeerd is en  $\alpha \in \mathbb{R}$  dan is  $\alpha X$  gegeerd.
- (G4) Indien  $X$  en  $Y$  gegeerd zijn, dan is  $X + Y$  gegeerd.

De twee laatste axioma's vereisen dat onze opbrengstschaal (zie §2.2.2) lineair is, wat inderdaad het geval is. De verzameling van gegeerde gokken schrijven we als  $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(\Omega)$ . We zien dat deze gegeerdheidsaxioma's in belangrijke mate het gedrag van de spelers ten aanzien van gokken zullen karakteriseren. De axioma's G3 en G4, die uitdrukken dat een lineaire combinatie van gegeerde gokken gegeerd is, zullen verder ook aan de basis liggen van de formulering van interne rationaliteit (zeker verlies vermijden in §3.3.3 en coherentie in §3.3.4).

We zullen verder bijna altijd  $X$  schrijven in plaats van  $X(\omega)$ .

### 3.3 Onderprevisies

#### 3.3.1 Onder- en bovenprevisies

##### *Definitie 3.4 (onderprevisie)*

*Een onderprevisie is een functionaal*

$$\underline{P} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P} : X \rightarrow \underline{P}(X),$$

waarbij het domein  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$  bestaat uit een bepaalde verzameling gokken.

Soms schrijven we  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  voor een onderprevisie. Dit doen we om expliciet de verzameling van mogelijke toestanden en de verzameling gokken aan te geven. Bemerkt dat  $\mathcal{K}$  niet noodzakelijk dezelfde eigenschappen heeft als  $\mathcal{L}(\Omega)$  (zoals b.v. lineariteit). Onderprevisies zijn het algemene onzekerheidsmodel dat we beschouwen, de andere kunnen er uit worden afgeleid, als zijnde equivalent (bovenprevisies) of zijnde speciale gevallen (lineaire revisies, imprecieze en precieze waarschijnlijkheden).

Bovenprevisies zullen we veel minder uitgebreid behandelen als onderprevisies, gezien het geringere gebruik dat we ervan zullen maken. Als  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  een onderprevisie is dan wordt de *toegevoegde bovenprevisie*  $\overline{P}$  als volgt gedefinieerd

$$\overline{P} : -\mathcal{K} = \{X \mid -X \in \mathcal{K}\} \longrightarrow \mathbb{P} : X \rightarrow \overline{P}(X) = -\underline{P}(-X),$$

waarbij het domein van  $\underline{P}$  kan verschillen van dat van  $\overline{P}$  (i.e.  $-\mathcal{K} \neq \mathcal{K}$  is mogelijk).

We zullen in de volgende hoofdstukken gebruik maken van revisies om de beschikbare gegevens van de spelers mee voor te stellen.

### 3.3.2 Gedragsgerichte interpretatie

De gegeerdheidsaxioma's in §3.2.2 bepalen reeds gedeeltelijk het gokgedrag. Nu zullen de inschattingen van de speler, vervat in  $\underline{P}$  en  $\overline{P}$ , zorgen voor een verdere bepaling hiervan.

Volgens onze gedragsgerichte interpretatie wordt de onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  namelijk als volgt gezien. Voor elke gok  $X \in \mathcal{K}$  is de speler bereid elke prijs (in nut) strikt kleiner dan  $\underline{P}(X)$  te betalen om  $X$  in zijn bezit te krijgen. Bovendien is  $\underline{P}(X)$  de grootste waarde waarvoor dit geldt. De onderprevisie  $\underline{P}(X)$  kan dus worden beschouwd als een *supremumaankoopprijs*  $\mu$  waarvoor  $X - \mu$  een gegeerde gok is. We schrijven dan

$$\underline{P}(X) = \sup \{ \mu \mid (X - \mu) \in \mathcal{G} \}.$$

We noemen  $G(X) = X - \underline{P}(X)$  dan de *marginale gok* van  $X$ , aangezien  $G(X) + \varepsilon$  dan een gegeerde gok is voor alle  $\varepsilon > 0$ . Bemerkt dat  $G(X)$  niet noodzakelijk zelf gegeerd is daar het supremum niet noodzakelijk bereikt wordt ( $G(X)$  noemen we *bijna gegeerd*). We kunnen een marginale gok zien als een transactie waarbij de speler  $\underline{P}(X)$  betaalt voor een gok  $X$ . De speler koopt dus  $X$  voor  $\underline{P}(X)$ .

Bemerkt dat deze interpretatie niet betekent dat een model waar wordt gebruik gemaakt van een onderprevisie iets te maken moet hebben met gokken, enkel dat het model bovenvermelde gevolgen heeft met betrekking tot gokken. Bemerkt ook dat er enkel iets gezegd wordt over de bereidheid van de speler

om prijzen kleiner dan  $\underline{P}(X)$  te betalen, maar niets over situaties met prijzen groter dan  $\underline{P}(X)$ . In dit geval kan de speler ook willen betalen, onbeslist zijn of niet willen betalen.

We kunnen de gedragsgerichte interpretatie van een toegevoegde bovenprevisie  $(\Omega, -\mathcal{K}, \overline{P})$  als volgt duidelijk maken.

$$\begin{aligned}\overline{P}(X) &= -\sup\{\mu \mid (-X - \mu) \in \mathcal{G}\} \\ &= \inf\{-\mu \mid (-X - \mu) \in \mathcal{G}\} \\ &= \inf\{\nu \mid (\nu - X) \in \mathcal{G}\}.\end{aligned}$$

De bovenprevisie  $\overline{P}(X)$  kan dus als een *infimumverkoopsprijs*  $\nu$  worden beschouwd waarvoor  $\nu - X$  een gegeerde gok is. Voor een  $X \in -\mathcal{K}$  kunnen we schrijven dat  $G(-X) = -X - \underline{P}(-X) = \overline{P}(X) - X$ . De marginale gok van  $-X$  kunnen we dan zien als een transactie waarbij de speler  $\overline{P}(X)$  wordt betaald voor een gok  $X$ . De speler verkoopt dus  $X$  voor  $\overline{P}(X)$ .

### 3.3.3 Zeker verlies vermijden

#### **Definitie 3.5 (zeker verlies vermijden van onderprevisies)**

We zeggen dat  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  zeker verlies vermijdt indien

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \forall \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, \forall X_j \in \mathcal{K}. \quad (3.1)$$

**Verantwoording van definitie 3.5** Stel dat (3.1) niet zou opgaan. Dit betekent dat er dus  $\alpha_j \in \mathbb{R}_0^+$  en  $X_j \in \mathcal{K}$  bestaan waarvoor de netto opbrengst van een lineaire combinatie van marginale gokken  $G(X_j)$  strikt negatief is, namelijk

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{P}^+ : \sum_{j=1}^n \alpha_j (G(X_j) + \varepsilon) < 0.$$

Er bestaat dus met andere woorden een gegeerde combinatie (via de axioma's G3 en G4) van gegeerde gokken  $G(X_j) + \varepsilon$  die een strikt negatieve opbrengst heeft. Men kan dit zekere verlies vermijden door te eisen dat (3.1) geldt voor  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ .  $\square$

Om enkele interessante gevolgen af te leiden kunnen we (3.1) nog als volgt herschrijven

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{P}(X_j), \quad \forall n \geq 1, \forall \alpha_j \in \mathbb{R}, \forall X_j \in \mathcal{K}. \quad (3.2)$$

Hieruit volgt, door  $n = 1$  en  $\alpha_1 = 1$  te nemen dat

$$\underline{P}(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X, \quad \forall X \in \mathcal{K}.$$

Dit betekent dat een speler voor een gok nooit meer mag betalen dan het supremumbedrag dat hij ermee kan verdienen. Door over te gaan naar de toegevoegde bovenprevisie hebben we dan voor  $X \in -\mathcal{K}$  dat

$$\begin{aligned}\underline{P}(-X) &\leq \sup_{\omega \in \Omega} (-X) \\ \Rightarrow \overline{P}(X) &\geq -\sup_{\omega \in \Omega} (-X) \\ \Rightarrow \overline{P}(X) &\geq \inf_{\omega \in \Omega} X.\end{aligned}$$

Wat betekent dat een speler voor een gok nooit minder mag aanvaarden dan het infimumbedrag dat hij ermee kan verdienen.

Als we (3.2) toepassen met  $n = 2$ ,  $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$  en  $X_1 = X$  en  $X_2 = -X$ , dan krijgen we  $\underline{P}(X) + \underline{P}(-X) \leq 0$  of anders geschreven

$$\underline{P}(X) \leq \overline{P}(X). \quad (3.3)$$

Een onderprevisie die zeker verlies vermijdt is dus nooit groter dan haar toegevoegde bovenprevisie.

### 3.3.4 Coherentie

#### **Definitie 3.6 (coherentie van onderprevisies)**

We zeggen dat  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  coherent is indien

$$\begin{aligned}\sup_{\omega \in \Omega} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) - \alpha_0 G(X_0) \right) &\geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_0, \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, \\ &\forall X_0, X_j \in \mathcal{K}.\end{aligned} \quad (3.4)$$

**Verantwoording van definitie 3.6** We zullen deze formulering als volgt geval per geval verantwoorden

- (a) *Geval*  $\alpha_0 = 0$ : Dit is niets anders dan het vermijden van zeker verlies, zie hiervoor §3.3.3. Elke coherente onderprevisie vermijdt dus zeker verlies.
- (b)  $\alpha_0 > 0$ , *maar*  $n = 0$ :<sup>4</sup> De coherentievoorwaarde (3.4) wordt nu voor alle  $X_0 \in \mathcal{K}$

$$\sup_{\omega \in \Omega} (-G(X_0)) = -\inf_{\omega \in \Omega} G(X_0) \geq 0 \Rightarrow \underline{P}(X_0) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X_0. \quad (3.5)$$

Stel dat deze niet zou opgaan, namelijk dat  $\underline{P}(X_0) < \inf_{\omega \in \Omega} X_0$ . Dit betekent dat de speler enkel zekere winst wil aanvaarden en nooit een gok zal kopen die een risico op verlies inhoudt. Daar echter  $\underline{P}(X_0)$  een supremumaankoop prijs is voor  $X_0$ , moet  $\underline{P}(X_0)$  minstens gelijk zijn aan  $\inf_{\omega \in \Omega} X_0$ . De coherentievoorwaarde zorgt er dus ook voor dat de speler niet alle risico's schuwt (inclusief het risico op een nulopbrengst).

4. Dit geval komt ook overeen met  $\alpha_0 > 0$  en  $\alpha_j = 0, \forall j$ .

- (c)  $\alpha_0, \alpha_j > 0$  en  $n > 0$ : We gaan na wat er gebeurt indien in dit geval niet aan de voorwaarde (3.4) voldaan is. Dus

$$\begin{aligned} & \exists \alpha_0, \alpha_j, n, \exists X_0, X_j : \sup_{\omega \in \Omega} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) - \alpha_0 G(X_0) \right) < 0 \\ \Rightarrow & \exists \delta \in \mathbb{P}^+ : \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) - \alpha_0 G(X_0) + \delta \leq 0 \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^n \alpha_j (G(X_j) + \varepsilon) \leq \alpha_0 (G(X_0) - \varepsilon) \text{ met } \varepsilon = \frac{\delta}{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j} > 0. \end{aligned}$$

De gok in het linkerlid is gegeerd wegens G4, G3 en de gegeerdheid van elke  $G(X_j) + \varepsilon$ . De betere gok in het rechterlid zou dus ook gegeerd moeten zijn. Wegens G3 zou dan ook  $G(X_0) - \varepsilon$  gegeerd moeten zijn. Dan zou de speler bereid zijn  $\underline{P}(X_0) + \varepsilon$  te betalen voor  $X_0$ . Dit is echter meer dan zijn supremumaankoopprijs voor  $X_0$  en daarom zou  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  inconsistent zijn, wat dus vermeden wordt met definitie 3.6.  $\square$

Uit (3.5) volgt voor alle  $X \in \mathcal{K}$  dat  $\underline{P}(X) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X$ . Door over te gaan naar de toegevoegde bovenprevisie hebben we dan voor alle  $X \in -\mathcal{K}$  dat  $\overline{P}(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X$ . We kunnen dan, rekening houdend met (3.3), samenvattend volgende belangrijke eigenschap neerschrijven

$$\inf_{\omega \in \Omega} X \leq \underline{P}(X) \leq \overline{P}(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X, \forall X \in (\mathcal{K} \cap -\mathcal{K}). \quad (3.6)$$

We zullen in volgende hoofdstukken altijd met coherente onderprevisies (of speciale gevallen ervan) werken.

### 3.3.5 Natuurlijke uitbreiding

#### **Definitie 3.7 (natuurlijke uitbreiding)**

Beschouw een onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ , dan noemen we  $\underline{E}$  de natuurlijke uitbreiding van  $\underline{P}$ , gedefinieerd op  $\mathcal{L}(\Omega)$  door

$$\underline{E}(X) = \sup \left\{ \inf_{\omega \in \Omega} \left( X - \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) \right), n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, X_j \in \mathcal{K} \right\}.$$

Waarbij dus  $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ .

**Verantwoording van definitie 3.7** Beschouw een gok  $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ . We wensen een unieke supremumaankoopprijs  $\mu$  van de speler voor  $X$  te vinden die rekening houdt met reeds bestaande inschattingen (bevat in  $\underline{P}$ ) en de coherentievoorwaarde. Dit betekent dat  $X - \mu$  voor de speler een bijna gegeerde gok is.

Indien we willen dat  $X - \mu$  compatibel is met de reeds gemaakte inschattingen moet de coherentievoorwaarde

$$\sup_{\omega \in \Omega} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) - (X - \mu) \right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, \forall X_j \in \mathcal{K} \quad (3.7)$$

dus voldaan zijn. Stel namelijk dat dit niet het geval is, i.e.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \sum_{j=1}^n \alpha_j (G(X_j) + \varepsilon) < X - \mu.$$

Gezien het linkerlid wegens G3 en G4 bijna gegeerd is, zal het rechterlid een gegeerde gok voorstellen, wat in tegenspraak is met de veronderstelling dat  $\mu$  de supremumaankoop prijs is voor  $X$ . We herschrijven nu (3.7) door sup om te vormen naar inf

$$\mu \geq \inf_{\omega \in \Omega} \left( X - \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) \right), \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, \forall X_j \in \mathcal{K}.$$

We vinden dus dat  $\mu$  om coherentie te garanderen moet voldoen aan

$$\mu \geq \sup \left\{ \inf_{\omega \in \Omega} \left( X - \sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j) \right), n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R}_0^+, X_j \in \mathcal{K} \right\}.$$

De natuurlijke uitbreiding  $\underline{E}(X)$  is dan de laagste aankoop prijs  $\mu$  die hieraan voldoet. We nemen deze laagste prijs aangezien ze de minste veronderstellingen maakt over het gedrag van de speler, dit wil zeggen, zo conservatief mogelijk is.  $\square$

De natuurlijke uitbreiding van een bepaalde  $\underline{P}$  is triviaal behalve als  $\underline{P}$  zeker verlies vermijdt. Indien  $\underline{P}$  namelijk zeker verlies maakt, dan kan  $\sum_{j=1}^n \alpha_j G(X_j)$  via  $\alpha_j$  willekeurig groot en negatief worden. Dit betekent dat ook  $\mu$  willekeurig groot kan worden en dan wordt  $\underline{E}(X) = \infty, \forall X \in \mathcal{L}(\Omega)$ . Indien echter  $\underline{P}$  zeker verlies vermijdt, dan is  $\underline{E}$  coherent (zie [7, §3.1.2 en §3.1.3] hiervoor en ook voor verdere eigenschappen en andere formuleringen van  $\underline{E}$ ). We kunnen natuurlijke uitbreiding dus ook gebruiken om een  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ , die zeker verlies vermijdt, coherent te maken op  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$  door natuurlijke uitbreiding toe te passen op alle  $X \in \mathcal{K}$ .

Natuurlijke uitbreiding kan dus gezien worden als dé elementaire constructieve methode in probabilistische redeneringen, daar ze toelaat uit oude previsions (die zeker verlies vermijden en gedefinieerd zijn op een  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ ) nieuwe te construeren (die coherent zijn en gedefinieerd op de gehele  $\mathcal{L}(\Omega)$ ).

### 3.4 Geval van een lineaire ruimte $\mathcal{K}$

#### 3.4.1 Axioma's voor coherentie

In het speciale geval dat we te maken hebben met een lineaire ruimte  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$  valt de voorwaarde voor coherentie en de daarin vervatte voorwaarde voor het vermijden van zeker verlies te schrijven onder de vorm van de 3 volgende axioma's (voor het bewijs hiervan, zie [7, §2.5.5]). De onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  is coherent indien voor  $X, Y \in \mathcal{K}$

- (P1)  $\underline{P}(X) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X$  (zekere winst aanvaarden),
- (P2)  $\underline{P}(\alpha X) = \alpha \underline{P}(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+,$
- (P3)  $\underline{P}(X + Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y).$

In het geval van een lineaire  $\mathcal{K}$  geldt er dat  $\mathcal{K} = -\mathcal{K}$  en zijn toegevoegde bovenprevisies  $(\Omega, \mathcal{K}, \overline{P})$  dus op hetzelfde domein gedefinieerd als onderprevisies. Er gelden dan volgende toegevoegde versies van bovenstaande axioma's

- (P4)  $\overline{P}(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X$  (zekere winst aanvaarden),
- (P5)  $\overline{P}(\alpha X) = \alpha \overline{P}(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+,$
- (P6)  $\overline{P}(X + Y) \leq \overline{P}(X) + \overline{P}(Y).$

Uit P2, P3 respectievelijk P5, P6 volgt dat  $\underline{P}$  respectievelijk  $\overline{P}$  een concave respectievelijk een convexe functionaal zijn.

#### 3.4.2 Lineaire en nietszeggende previsies

We behandelen hier kort nog twee speciale gevallen van coherente onderprevisies gedefinieerd op een lineaire  $\mathcal{K}$ , die mooi illustreren hoe onzekerheidsmodellen kunnen verschillen als de bekende gegevens verschillen.

Een *lineaire previsie* is een coherente onderprevisie die toegevoegd is aan zichzelf, i.e. waarvoor

$$\underline{P}(X) = -\underline{P}(-X) = \overline{P}(X), \forall X \in \mathcal{K}.$$

We schrijven dan  $P(X)$ . We kunnen de axioma's voor coherentie nu als volgt schrijven (door combinatie van P1 en P4, P2 en P5, P3 en P6):<sup>5</sup>

- (P7)  $\inf_{\omega \in \Omega} X \leq P(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X, \forall X \in \mathcal{K},$
- (P8)  $P(\alpha X) = \alpha P(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathcal{K},$
- (P9)  $P(X + Y) = P(X) + P(Y), \forall X, Y \in \mathcal{K}.$

5. In [7, §2.8.5] wordt aangetoond dat deze axioma's equivalent zijn met

- (L1)  $X \geq 0 \Rightarrow P(X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{K},$
- (L2)  $P(\alpha X + \beta Y) = \alpha P(X) + \beta P(Y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathcal{K}.$
- (L3)  $P(1) = 1.$

Deze axioma's bepalen de genormeerde positieve lineaire functionalen op  $\mathcal{K}$ , die automatisch continu zijn.



In [14, §3.1.5] wordt bewezen dat P8 volgt uit P9 en P7.

Volgens onze gedragsgerichte interpretatie is de speler dan bereid de gok  $X$  te kopen aan elke prijs kleiner dan  $P(X)$  en ze te verkopen voor elke prijs groter dan  $P(X)$ . In [14] wordt dit een *billijke prijs* genoemd. We zien dat de imprecisie hier minimaal is. Er is namelijk geen onbepaaldheid in de inschattingen van de speler. Dit is enkel te rechtvaardigen indien hij over zeer veel gegevens beschikt betreffende de gok  $X$  (en dus de ware toestand  $\omega \in \Omega$ ).

Als het andere extremum lijkt een totaal gebrek aan gegevens een model te impliceren dat de imprecisie  $\bar{P}(X) - \underline{P}(X)$  maximaliseert. We definiëren dan *nietszeggende previsions* als volgt voor  $X \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}\underline{P}(X) &= \inf_{\omega \in \Omega} X, \\ \bar{P}(X) &= \sup_{\omega \in \Omega} X.\end{aligned}$$

Daar deze definities voldoen aan P1 tot P6 zijn nietszeggende previsions coherent.

Het gedrag van een speler die nietszeggende previsions gebruikt is eenvoudig te beschrijven. Hij zal enkel een gok kopen indien dit hem zekere winst oplevert. Deze veilige gedragsregel lijkt inderdaad gepast indien de speler niets weet over de ware toestand.

### 3.4.3 Onderenveloppes van lineaire previsions

We schrijven  $\mathcal{P}$  voor de verzameling van alle lineaire previsions gedefinieerd op de lineaire ruimte  $\mathcal{L}(\Omega)$ .  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  is een *onderenveloppe van lineaire previsions* indien er een verzameling van lineaire previsions  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$  bestaat waarvoor geldt dat

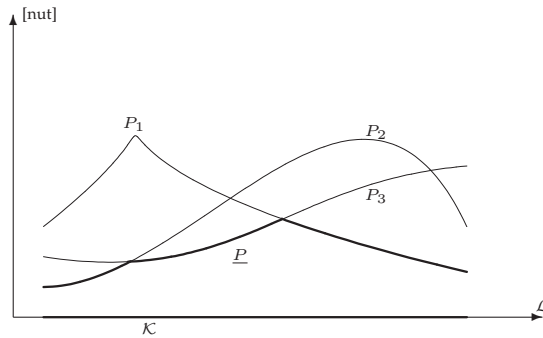
$$\underline{P}(X) = \inf \{P(X) \mid P \in \mathcal{M}\}, \forall X \in \mathcal{K}.$$

Als  $\mathcal{M}$  gesloten is kunnen we inf vervangen door min.

We zeggen dat een bepaalde onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  een andere onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{Q})$  *domineert* indien geldt dat  $\underline{P}(X) \geq \underline{Q}(X), \forall X \in \mathcal{K}$ . We schrijven dan ook soms korter  $\underline{P} \geq \underline{Q}$ . Beschouw nu een onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ . We gebruiken de notatie  $\mathcal{M}(\underline{P})$  om de verzameling van alle lineaire previsions aan te duiden die  $\underline{P}$  op  $\mathcal{K}$  domineren, dus

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P \in \mathcal{P} \mid P(X) \geq \underline{P}(X), \forall X \in \mathcal{K}\}. \quad (3.8)$$

Indien nu  $\underline{P}$  de onderenveloppe is van een verzameling lineaire previsions  $\mathcal{M}$  dan wordt  $\underline{P}$  per definitie gedomineerd door elke  $P \in \mathcal{M}$ . Hieruit volgt dus dat  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$ . Dit betekent dat  $\underline{P}$  slechts de onderenveloppe is van een bepaalde verzameling  $\mathcal{M}$  als het de onderenveloppe is van  $\mathcal{M}(\underline{P})$ . We kunnen  $\underline{P}$  dan gewoon een *onderenveloppe* noemen.



**Figuur 3.1:** Illustratie van  $\underline{P}$  als onderenveloppe van een verzameling lineaire previsions.

In figuur 3.1 geven we een zeer eenvoudige illustratie van  $\underline{P}$  als onderenveloppe. We stellen de verzameling van mogelijke gokken  $\mathcal{L}$  voor als een rechte en de beschouwde gokken  $\mathcal{K}$  door een eindig interval hierop (vetjes). We beperken ons voor de eenvoud tot een  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ . De onderenveloppe  $\underline{P}$  wordt dan weergegeven in een dikkere lijn.

We kunnen als volgt nog aantonen dat  $\mathcal{M}(\underline{P})$  compact en convex is. Aangezien  $\mathcal{P}$  compact is (zie hiervoor [7, §D3]) en  $\mathcal{M}(\underline{P})$  gesloten is volgt dat  $\mathcal{M}(\underline{P})$  compact is (zijnde een gesloten deelverzameling van de compacte  $\mathcal{P}$ ). Om de convexiteit te bewijzen tonen we dat een convexe combinatie  $P_3$  van  $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(\underline{P})$  ook een element van  $\mathcal{M}(\underline{P})$  is, namelijk

$$\begin{cases} P_1 \geq \underline{P} \\ P_2 \geq \underline{P} \end{cases} \Rightarrow P_3 = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2 \geq \lambda \underline{P} + (1 - \lambda) \underline{P} = \underline{P}, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Volgende interessante stellingen worden nog bewezen in [7, §3.3.3 en §3.4.1].

### **Stelling 3.1 (onderenveloppe-theorema)**

Beschouw een onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$ . Er geldt dan dat

- $\underline{P}$  zeker verlies vermijdt  $\Leftrightarrow \mathcal{M}(\underline{P}) \neq \{\emptyset\}$  (dus  $\Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} : P \geq \underline{P}$ ),
- $\underline{P}$  is coherent  $\Leftrightarrow \underline{P}$  is de onderenveloppe van  $\mathcal{M}(\underline{P})$  (dus  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{M} \subset \mathcal{P} : \underline{P}$  is de onderprevisie van  $\mathcal{M}$ ).

### **Stelling 3.2 (natuurlijke-uitbreiding-theorema)**

Veronderstel dat de onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  zeker verlies vermijdt. Haar natuurlijke uitbreiding  $\underline{E}$  is dan de onderenveloppe van  $\mathcal{M}(\underline{P})$ . Dit betekent dat  $\underline{E}(X) = \min\{P(X) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}, \forall X \in \mathcal{L}(\Omega)$ . Er geldt ook dat  $\mathcal{M}(\underline{E}) = \mathcal{M}(\underline{P})$ .

We zien hier dat we elke coherente onderprevisie kunnen schrijven als de onderenveloppe van een verzameling lineaire previsions. Er bestaat nu een andere

benaderingswijze van onderprevisies dan deze die het als een directe beschrijving van het gedrag van de speler beschouwt. We kunnen een onderprevisie namelijk zien als een handige samenvatting van een verzameling lineaire previsions. Volgens het Bayesiaanse dogma van precisie zouden de overtuigingen van de speler door één bepaalde lineaire previsie  $P_T$  moeten worden voorgesteld. We kunnen die eis afzwakken door te zeggen dat dit slechts mogelijk is in ideale gevallen (we spreken dan van het *Bayesiaanse dogma van ideale precisie*). We hebben dan  $\underline{P}$  enkel nodig omwille van onzekerheid over de juiste  $P_T$ . Deze tweede benadering wordt *sensitiviteitsanalyse* genoemd en ze is ook verenigbaar met de hier uiteengezette theorie.

### 3.5 Imprecieze waarschijnlijkheden

In dit onderdeel behandelen we een belangrijk speciaal geval van onder- en bovenprevisies. Namelijk deze die gedefinieerd zijn op  $\{0, 1\}$ -waardige gokken. Dit onzekerheidsmodel kan ruwweg gezien worden als een versie van de algemeen gebruikte precieze waarschijnlijkheden die imprecisie toelaat.

#### 3.5.1 Notaties

Gebeurtenissen van  $\Omega$  duiden we aan met  $A, B, \dots$  en hun complement met  $A^c, B^c$ . We kunnen bijvoorbeeld schrijven

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\text{paaseieren, kwarteleieren, kippeneieren}\}, \\ A &= \{\text{paaseieren}\}, \quad A^c = \{\text{kwarteleieren, kippeneieren}\}.\end{aligned}$$

We schrijven verder  $I_A$  om de *indicatorfunctie* van de gebeurtenis  $A$  weer te geven, namelijk

$$I_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\} : \omega \rightarrow I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{indien } \omega \in A, \\ 0 & \text{indien } \omega \in A^c. \end{cases}$$

Een indicatorfunctie is dus niets anders dan  $\{0, 1\}$ -waardige gok. Op deze manier verbinden we met elke gebeurtenis  $A$  van  $\Omega$  een gok  $I_A$ . Deze gokken vormen samen een deelverzameling  $\mathcal{K}$  van  $\mathcal{L}(\Omega)$ .

#### 3.5.2 Onder- en bovenwaarschijnlijkheden

Beschouw een bepaalde verzameling van gebeurtenissen  $\mathcal{A}$  en de daarmee geassocieerde verzameling indicatorfuncties  $\mathcal{K}$ . Als de onderprevisie  $(\Omega, \mathcal{K}, \underline{P})$  gedefinieerd is, dan noemen we  $\underline{P}$  een *onderwaarschijnlijkheid* op  $\mathcal{A}$ . Noem

$\underline{P}(I_A)$ <sup>6</sup> dan de onderwaarschijnlijkheid van de gebeurtenis  $A$ . We interpreteren  $\underline{P}(I_A)$  als de *supremumgokverhouding*<sup>7</sup> van de speler om een weddenschap op gebeurtenis  $A$  te aanvaarden.

We zullen de definitie van bovenprevisies lichtjes wijzigen om tot een definitie van bovenwaarschijnlijkheid te komen. Beschouw hiervoor  $\mathcal{A}^c = \{A^c \mid A \in \mathcal{A}\}$  en de geassocieerde verzameling van indicatorfuncties  $\mathcal{K}^c = \{I_{A^c} = 1 - I_A \mid I_A \in \mathcal{K}\}$ . De *bovenwaarschijnlijkheid* op  $\mathcal{A}^c$  van  $A$  wordt dan gedefinieerd door

$$\overline{P}(I_A) = 1 - \underline{P}(I_{A^c}).$$

We kunnen  $\overline{P}(I_A)$  dan interpreteren als de *infimumgokverhouding* van de speler om een weddenschap op gebeurtenis  $A$  aan te bieden. De mate van imprecisie wordt weerom aangegeven door  $\overline{P}(I_A) - \underline{P}(I_A)$ .

Enkele gevolgen van coherente onder- en bovenwaarschijnlijkheden (die dus automatisch zeker verlies vermijden) zijn (overgenomen uit [7, §2.7.4])

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underline{P}(I_A) \leq \overline{P}(I_A) \leq 1, \\ \underline{P}(I_\emptyset) = \overline{P}(I_\emptyset) &= 0, \quad \underline{P}(I_\Omega) = \overline{P}(I_\Omega) = 1, \\ A \subset B &\Rightarrow \underline{P}(I_A) \leq \underline{P}(I_B), \quad \overline{P}(I_A) \leq \overline{P}(I_B). \end{aligned} \tag{3.9}$$

In [7, §2.7.3] wordt aangetoond dat imprecieze waarschijnlijkheden een beperkter onzekerheidsmodel zijn dan onderprevisies. Het blijkt namelijk zo te zijn dat verschillende coherente onderprevisies, als ze beperkt worden tot gebeurtenissen, dezelfde imprecieze waarschijnlijkheden kunnen leveren. Het is dus niet mogelijk om uit deze imprecieze waarschijnlijkheden een unieke onderprevisie af te leiden. Bijgevolg bevatten onderprevisies dus meer informatie dan hun beperking tot gebeurtenissen: de overeenkomende imprecieze waarschijnlijkheden.

### 3.5.3 Precieze en nietszeggende waarschijnlijkheden

Een speciaal geval van zowel lineaire revisies als onder- en bovenwaarschijnlijkheden zijn *precieze waarschijnlijkheden*. We noteren  $P(I_A)$  voor een precieze waarschijnlijkheid gedefinieerd op  $\mathcal{A}$ .  $P(I_A)$  kan dan worden geïnterpreteerd als een *billijke gokverhouding*. De speler is bereid op  $A$  te wedden voor alle gokverhoudingen onder  $P(I_A)$  en tegen  $A$  voor alle gokverhoudingen boven  $P(I_A)$ . We hebben gesproken en zullen verder veelal spreken over een *kans* als we precieze waarschijnlijkheden gebruiken.

6. In de literatuur (zoals [7]) wordt soms de verkorte notatie  $\underline{P}(A)$  gebruikt.

7. Een gokverhouding is een bedrag tussen 0 en 1 dat de speler, die een weddenschap aanvaardt, betaalt.

Een speciaal geval van zowel nietszeggende previsions als onder- en bovenwaarschijnlijkheden zijn *nietszeggende waarschijnlijkheden*, die gedefinieerd zijn op  $\mathcal{A}$ . Ze worden gekarakteriseerd door (3.9) en

$$\underline{P}(I_A) = 0, \overline{P}(I_A) = 1, \forall A \in \mathcal{A} \setminus \{\Omega, \emptyset\}.$$

### 3.6 Bronvermelding

In dit hoofdstuk was [7] voor elk onderdeel het meest gebruikte referentiewerk. Ook [8] werd gebruikt voor §3.3.3, §3.3.4 en §3.3.5. Om wegwijs te raken in de hier behandelde stof werden [9] en [10] gebruikt, die op die manier invloed hebben gehad op de verwoording in het merendeel van de onderdelen.

# Beslissingsproblemen en gevolgtrekking

## 4.1 Inleiding

Probabilistische redeneringen worden gebruikt om twee types doelen te bereiken. Enerzijds om gegevens te gebruiken voor gevolgtrekking (het komen tot een besluit) en anderzijds om gegevens te gebruiken voor het nemen van beslissingen. Veelal zal men pas een beslissing nemen na tot een besluit te zijn gekomen. Het is dus belangrijk dat de methode van gevolgtrekking en de methode van beslissen goed te combineren vallen.

Wij zullen in dit hoofdstuk beslissingsproblemen en gevolgtrekking onafhankelijk van elkaar behandelen. In hoofdstuk 5 zullen we ze samen gebruiken en zal duidelijk worden dat ze goed te combineren zijn.

Het kader van dit hoofdstuk is de speltheorie, zoals die in hoofdstuk 2 werd uiteengezet.

## 4.2 Beslissingsproblemen

We zullen *beslissingsproblemen* onmiddellijk bespreken zoals die optreden in de speltheorie (zie hoofdstuk 2). De gegevens waarop de beslissingen worden gebaseerd worden gemodelleerd door een coherente onderprevisie. De acties die genomen kunnen worden zijn de strategieën  $\sigma^i \in \Sigma^i$ . De verzameling van mogelijke toestanden  $\Omega$  kunnen we dan identificeren met  $\Sigma^{-i}$ . Met elke gekende actie en ongekende ware toestand komt er een opbrengst overeen, bij ons dus  $u^i(\sigma^i, \sigma^{-i})$ . Elke actie kan dan in verband worden gebracht met een gok uit  $\mathcal{K}^i = \{X_{\sigma^i} \mid \sigma^i \in \Sigma^i\} \subseteq \mathcal{L}(\Sigma^{-i})$ , namelijk

$$X_{\sigma^i} : \Sigma^{-i} \longrightarrow \mathbb{P} : \sigma^{-i} \rightarrow X_{\sigma^i}(\sigma^{-i}) = u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}). \quad (4.1)$$

### 4.2.1 Toelaatbare en maximale gokken en strategieën

De speler zal een strategie  $\sigma^i$  verkiezen boven  $\tau^i$  indien hij de gok  $X_{\sigma^i}$  verkiest boven de gok  $X_{\tau^i}$ . Hoe kan de speler nu een keuze maken tussen twee gokken? Veronderstel hiervoor dat zijn overtuigingen over  $\Omega$  (bij ons dus  $\Sigma^{-i}$ ) worden gemodelleerd door een coherente onderprevisie  $(\Sigma^{-i}, \mathcal{L}(\Sigma^{-i}), \underline{P})$ .

Een gok  $X \in \mathcal{K}^i$  wordt verkozen boven een gok  $Y \in \mathcal{K}^i$  als  $X \geq Y$  samen met  $X \neq Y$ . De reden hiervoor is dat de opbrengst van  $X(\omega)$  dan (afhankelijk van de ware toestand  $\omega$ ) soms beter en minstens even goed is als de opbrengst van  $Y(\omega)$ .

**Definitie 4.1 (ontoelaatbare gok)**

We noemen een gok  $X \in \mathcal{K}^i$  ontoelaatbaar indien er een gok bestaat die boven  $X$  wordt verkozen, dus als

$$\exists Y \in \mathcal{K}^i : Y \geq X \text{ en } X \neq Y.$$

In het andere geval is  $X$  toelaatbaar .

(Bemerkt dat deze definitie onafhankelijk is van  $\underline{P}$ .) Voor de  $X_{\sigma^i} \in \mathcal{K}^i$  komen ontoelaatbare gokken dus overeen met gedomineerde strategieën en toelaatbare gokken met niet-gedomineerde strategieën.<sup>1</sup> Dus voor twee verschillende strategieën  $\sigma^i, \tau^i \in \Sigma^i$  geldt er

$$\sigma^i \preceq \tau^i \Leftrightarrow X_{\sigma^i} \leq X_{\tau^i}.$$

We zullen dan ook de benaming toelaatbare en ontoelaatbare strategieën gebruiken.

We kunnen ons afvragen of er wel toelaatbare strategieën bestaan. Dit wordt gegarandeerd door volgende stelling (bewezen in [6, proposition 2]).

**Stelling 4.1**

Voor elke compacte  $M \subseteq \Sigma^{-i}$  bestaan er toelaatbare  $M$ -maximin-strategieën. Een gevolg hiervan is dat er altijd toelaatbare maximin-strategieën bestaan (met  $M = \Sigma^{-i}$ ) en ook dat er altijd toelaatbare beste antwoorden bestaan (met  $M = \{\sigma^{-i}\}$ ).

De speler kan dan alle ontoelaatbare gokken en dus ook de bijhorende strategieën negeren.

Door  $\underline{P}$  wordt er nu een verdere ordening aangebracht binnen de toelaatbare gokken. Er wordt dan een toelaatbare gok  $X$  boven een andere toelaatbare gok  $Y$  verkozen (notatie  $X > Y$ ) indien er een  $\varepsilon \in \mathbb{P}^+$  bestaat waarvoor  $X - (Y + \varepsilon)$  gegeerd is. De speler is dus bereid om  $Y$  te ruilen voor  $X$  en er ook nog een

1. Zie §2.3.4 voor de definitie van dominantie en de ordening  $\preceq$ .

strikt positief bedrag  $\varepsilon$  voor te betalen. Dit betekent dat hij  $X$  volgens de hierna gedefinieerde relatie  $>$  strikt boven  $Y$  verkiest. Het supremum van de  $\varepsilon > 0$  die de speler wil betalen is dan niets anders dan  $\underline{P}(X - Y) > 0$ . We vinden dus een ordening die als volgt door  $\underline{P}$  wordt gegenereerd

$$\begin{cases} X > Y \Leftrightarrow \underline{P}(X - Y) > 0, \\ Y > X \Leftrightarrow \underline{P}(Y - X) > 0 \Leftrightarrow \underline{P}(X - Y) < 0. \end{cases}$$

Aangezien het mogelijk is dat  $\underline{P}(X - Y) \leq 0$  (en dus  $\overline{P}(X - Y) \geq 0$ ), wordt er slechts een partiële ordening gegenereerd. Er bestaan met andere woorden mogelijks meerdere gokken die ongedomineerd zijn voor de relatie  $>$ . Er geldt voor deze gokken  $X$  dan dat

$$\begin{aligned} & \forall Y \in \mathcal{K}^i : \neg(Y > X) \\ & \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{K}^i : \neg(\overline{P}(X - Y) < 0) \\ & \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{K}^i : \overline{P}(X - Y) \geq 0. \end{aligned}$$

Dit leidt tot de hiernavolgende definitie.

**Definitie 4.2 (maximale gok)**

Een gok  $X \in \mathcal{K}^i$  wordt maximaal genoemd, voor een gegeven onderprevisie  $(\Sigma^{-i}, \mathcal{L}(\Sigma^{-i}), \underline{P})$ , wanneer  $X$  toelaatbaar is en er geldt dat

$$\overline{P}(X - Y) \geq 0, \forall Y \in \mathcal{K}^i.$$

Voor de  $X_{\sigma^i} \in \mathcal{K}^i$  kunnen we dan zeggen dat de strategie  $\sigma^i$  maximaal is indien  $X_{\sigma^i}$  maximaal is. Enkel de maximale gokken en strategieën in acht nemen is dan een tweede mogelijkheid voor selectie. Een nog verdere selectie tussen de verschillende maximale gokken kan niet worden gemaakt op basis van de informatie vervat in  $\underline{P}$  en haar gedragsgerichte interpretatie.

Het bestaan van maximale gokken is verzekerd indien  $\mathcal{K}^i$  compact is onder de supremumnorm-topologie<sup>2</sup> en  $\underline{P}$  coherent is (zie [7, §3.9.2]). De volgende stelling verzekert de compactheidsvereiste (ze wordt in [6, proposition 4] bewezen).

**Stelling 4.2**

$\mathcal{K}^i$  is convex en compact onder de supremumnorm-topologie.

2. Hierbij wordt de afstand tussen twee gokken van  $\mathcal{K}^i$  dan als volgt gedefinieerd

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sup_{\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}} |X(\sigma^{-i}) - Y(\sigma^{-i})|.$$



### 4.2.2 Bayes-strategieën

In dit onderdeel veronderstellen we dat de inschattingen van de speler gemiddeld worden door een lineaire previsie  $(\Sigma^{-i}, \mathcal{L}(\Sigma^{-i}), P)$ .

#### **Definitie 4.3 (Bayes-strategie)**

Een Bayes-strategie (onder  $P$ ) is een toelaatbare strategie  $\sigma^i \in \Sigma^i$  die een lineaire previsie  $P(X_{\sigma^i}) \in \mathcal{P}$  van de met  $\sigma^i$  geassocieerde gok  $X_{\sigma^i} \in \mathcal{K}^i$  maximaliseert.

Aangezien dus voor een Bayes-strategie  $\sigma^i$  en voor alle  $\tau^i \in \Sigma^i$  geldt dat

$$\begin{aligned} P(X_{\sigma^i}) &\geq P(X_{\tau^i}) \\ \Rightarrow P(X_{\sigma^i} - X_{\tau^i}) &\geq 0, \end{aligned}$$

is een Bayes-strategie niets anders dan een maximale strategie voor de gegeven lineaire previsie  $(\Sigma^{-i}, \mathcal{L}(\Sigma^{-i}), P)$ .

We gaan nu op zoek naar een Bayes-strategie behorend bij een  $P_f(X_{\sigma^i})$ . Hiervoor beschouwen we de met  $P_f$  corresponderende<sup>3</sup> waarschijnlijkheidsverdeling  $f$  over de simplex van de tegenspeler

$$f : \Sigma^{-i} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ : \sigma^{-i} \rightarrow f(\sigma^{-i}),$$

waarvoor geldt dat

$$\int_{\Sigma^{-i}} f(\sigma^{-i}) d\sigma^{-i} = 1. \quad (4.2)$$

We kunnen dan de lineaire previsie  $P_f(X_{\sigma^i})$ , die de precieze verwachtingen van de speler van de opbrengst voor een gok  $X_{\sigma^i}$  weergeeft, als volgt<sup>4</sup> schrijven

$$\begin{aligned} P_f(X_{\sigma^i}) &= \int_{\Sigma^{-i}} X_{\sigma^i}(\sigma^{-i}) f(\sigma^{-i}) d\sigma^{-i} \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \int_{\Sigma^{-i}} u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) f(\sigma^{-i}) d\sigma^{-i} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \int_{\Sigma^{-i}} \sum_{k=1}^{N^i} \sum_{l=1}^{N^{-i}} u^i(k, l) \sigma^i(k) \sigma^{-i}(l) f(\sigma^{-i}) d\sigma^{-i} \end{aligned}$$

3. Bemerkt dat niet alle lineaire previsions kunnen worden voorgesteld met behulp van een waarschijnlijkheidsverdeling. De resultaten van de heuristische afleiding in §4.2.2 gelden echter voor alle lineaire previsions, mits aanpassing van enkele definities (zie hiervoor [6, §2.2]).

4. Een voorwaarde is wel dat de gok  $X_{\sigma^i}$  meetbaar is. Aan deze voorwaarde is voldaan aangezien  $X_{\sigma^i}(\sigma^{-i}) = u^i(\sigma^i, \sigma^{-i})$  een continue functie van  $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$  is.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N^i} \sum_{l=1}^{N^{-i}} u^i(k, l) \sigma^i(k) \underbrace{\int_{\Sigma^{-i}} \sigma^{-i}(l) f(\sigma^{-i}) d\sigma^{-i}}_{\pi_f^{-i}(l)} \quad (4.3) \\
\Rightarrow P_f(X_{\sigma^i}) &= \sum_{k=1}^{N^i} \sum_{l=1}^{N^{-i}} u^i(k, l) \sigma^i(k) \pi_f^{-i}(l).
\end{aligned}$$

Uit de definitie van  $\pi_f^{-i}(l)$  volgt wegens (4.2) en  $\sigma^{-i}(l) \in [0, 1], \forall l \in S^{-i}, \forall \sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$  dat  $\pi_f^{-i}(l) \in [0, 1]$ . Aangezien  $\sum_{l=1}^{N^{-i}} \sigma^{-i}(l) = 1$  volgt er dat  $\sum_{l=1}^{N^{-i}} \pi_f^{-i}(l) = 1$ . We zien dan dat  $\pi_f^{-i}$  ook een punt van de simplex  $\Sigma^{-i}$  is en dus een strategie, namelijk deze die speler  $i$  verwacht dat zijn tegenspeler zal kiezen. Uit het voorgaande maken we ook op dat  $\pi_f^{-i}$  niets anders is als het massamiddelpunt van de waarschijnlijkheidsverdeling  $f$  op de simplex van speler  $-i$ . We vinden dan

$$P_f(X_{\sigma^i}) = u^i(\sigma^i, \pi_f^{-i}).$$

Een Bayes-strategie is dan een  $\sigma^i$  waarvoor geldt dat

$$\begin{aligned}
\sigma^i &= \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} P_f(X_{\tau^i}) \\
&= \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \pi_f^{-i}) \\
&= BR^i(\pi_f^{-i}).
\end{aligned}$$

### 4.2.3 Maximale strategieën in een imprecies model

In dit onderdeel veronderstellen we dat de inschattingen van de speler gemiddeld worden door een coherente onderprevisie  $(\Sigma^{-i}, \mathcal{L}(\Sigma^{-i}), \underline{P})$ .

#### Definitie 4.4 (toelaatbare $\underline{P}$ -maximin-strategie)

Een toelaatbare  $\underline{P}$ -maximin-strategie (onder  $\underline{P}$ ) is een toelaatbare strategie  $\sigma^i \in \Sigma^i$  die een onderprevisie  $\underline{P}(X_{\sigma^i})$  van de met  $\sigma^i$  geassocieerde gok  $X_{\sigma^i} \in \mathcal{K}^i$  maximaliseert.

In [6, proposition 6] wordt er bewezen dat elke toelaatbare  $\underline{P}$ -maximin-strategie een maximale strategie is onder  $\underline{P}$ . Ook in [6, proposition 7] worden de twee volgende stellingen bewezen.

#### Stelling 4.3

Beschouw een strategie  $\sigma^i \in \Sigma^i$ . Volgende uitspraken zijn dan equivalent

- $\sigma^i$  is een maximale strategie onder  $\underline{P}$ ,
- $\sigma^i$  is een Bayes-strategie onder een lineaire previsie  $P$  in  $\mathcal{M}(\underline{P})$ ,
- $\sigma^i$  is een beste antwoord op de  $\pi_f^{-i}$  van een  $P_f \in \mathcal{M}(\underline{P})$ , namelijk

$$\sigma^i \in BR^i(M_{\underline{P}}) \text{ met } \Sigma^i \supseteq M_{\underline{P}} = \{\pi_f^{-i} \mid P_f \in \mathcal{M}(\underline{P})\}.$$

**Stelling 4.4**

Beschouw een strategie  $\sigma^i \in \Sigma^i$ . Er geldt dan dat  $\sigma^i$  een  $\underline{P}$ -maximin-strategie is als en slechts als  $\sigma^i$  een  $M_{\underline{P}}$ -maximin-strategie is.

**Bewijs van stelling 4.4** Deze stelling wordt ook in [6, proposition 7] bewezen, maar het bewijs wordt hier gegeven als een mooie illustratie van  $\underline{P}$  als onderenveloppe en ter herinnering aan de definities van  $M$ -maximin strategieën. We gaan uit van

$$\sigma^i = \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} \underline{P}(X_{\tau^i}).$$

Nu kunnen we het volgende schrijven

$$\underline{P}(X_{\tau^i}) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} P(X_{\tau^i}) = \min_{P_f \in \mathcal{M}(\underline{P})} u^i(\tau^i, \pi_f^{-i}) = \min_{\sigma^{-i} \in M_{\underline{P}}} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}).$$

Hieruit volgt dat

$$\sigma^i = \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} \min_{\sigma^{-i} \in M_{\underline{P}}} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}),$$

wat het gestelde bewijst. □

Volgende stelling garandeert ons dat er in een imprecies model maximale strategieën bestaan.

**Stelling 4.5**

- (a)  $M_{\underline{P}}$  is compact en convex.
- (b) Er bestaan toelaatbare  $M_{\underline{P}}$ -maximin strategieën.

**Bewijs van stelling 4.5**

- (a) We tonen eerst aan dat  $M_{\underline{P}}$  compact en convex is: De elementen van  $M_{\underline{P}} - \pi_f^{-i}$  worden gevonden als zwaartepunten van waarschijnlijkheidsverdelingen  $f$ . Deze  $f$  vormen een compacte en convexe verzameling. Dit is zo aangezien de verzameling van corresponderende lineaire previsions  $P_f - \mathcal{M}(\underline{P})$  die eigenschappen heeft en het verband tussen  $f$  en  $P_f$  continu en lineair is. Compactheid en convexiteit worden namelijk bewaard door respectievelijk continuïteit en lineariteit. Ook het verband tussen  $f$  en  $\pi_f$  is lineair en continu (namelijk een gewogen integratie, zie (4.3)). Het gestelde volgt dus.
- (b) Door toepassen van stelling 4.1 op de compacte  $M_{\underline{P}}$  volgt onmiddellijk het gestelde. □

Aangezien er dus toelaatbare  $M_{\underline{P}}$ -maximin strategieën bestaan, volgt er via stelling 4.4 dat er  $\underline{P}$ -maximin strategieën bestaan die allen maximaal zijn.

### 4.3 Statistische gevolgtrekking

We gebruiken de term *statistische gevolgtrekking* voor situaties waarbij een onzekerheidsmodel, gebaseerd op bepaalde gegevens, wordt aangepast na het verkrijgen van nieuwe gegevens. Het gevolg van deze nieuwe gegevens is dan een aangepast model. In de speltheoretische context waarvoor we statistische gevolgtrekking onderzoeken komen deze nieuwe gegevens overeen met de zuivere strategieën die in voorgaande sessies van een spel gespeeld werden door de tegenspeler.

#### 4.3.1 Het Dirichletmodel

Hier behandelen we het *Dirichletmodel* als model van statistische gevolgtrekking. De basis van dit model is de hierna gedefinieerde waarschijnlijkheidsverdeling.

##### **Definitie 4.5 (Dirichletverdeling)**

Beschouw een reële  $N$ -component-vector  $\vartheta$  met  $\vartheta_k > 0$  en  $\sum_{k=1}^N \vartheta_k = 1$ . Dan heeft  $\vartheta$  een Dirichletverdeling met parameter  $\alpha$  (ook een reële  $N$ -component-vector met  $\alpha_k > 0$ ) indien de waarschijnlijkheidsverdeling gegeven wordt door

$$f(\vartheta | \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_N)} \vartheta_1^{\alpha_1-1} \dots \vartheta_N^{\alpha_N-1} \propto \prod_{k=1}^N \vartheta_k^{\alpha_k-1},$$

waarbij  $\Gamma$  staat voor de gammafunctie.

Zo'n waarschijnlijkheidsverdeling geeft dan de kans weer om een bepaalde  $\vartheta$  tegen te komen. De verwachtingswaarde van een vector  $\vartheta$  die een Dirichletverdeling met parameter  $\alpha$  heeft is

$$E(\vartheta) = \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^N \alpha_k}. \quad (4.4)$$

Beschouw nu een ruimte van mogelijke toestanden  $\Omega$ . Laten we *multinomiale bemonstering* veronderstellen. Er worden dan achtereenvolgens  $t$  van elkaar onafhankelijke observaties gemaakt van de ware toestand  $\omega \in \Omega$  die optreedt (deze moet niet telkens dezelfde zijn). De kans voor het optreden van  $\omega_k$  is  $\vartheta_k (\forall k \in \{1, \dots, N\})$ , zoals die in definitie 4.5 werden bepaald. We noteren het aantal keer dat een  $\omega_k$  optreedt na  $t$  observaties door  $\kappa_t(\omega_k) = \kappa_t(k)$  en  $\kappa_t$  is dus weerom een  $N$ -component-vector. Er geldt dus dat  $\sum_{k=1}^N \kappa_t(k) = t$ . De gemaakte veronderstellingen zorgen ervoor dat  $\kappa_t$  een *multinomiale verdeling* heeft met als *kansfunctie*

$$L_t(\vartheta) = \frac{t!}{\kappa_t(1)! \dots \kappa_t(N)!} \vartheta_1^{\kappa_t(1)} \dots \vartheta_N^{\kappa_t(N)} \propto \prod_{k=1}^N \vartheta_k^{\kappa_t(k)}.$$

De kansfunctie geeft de kans om een bepaalde  $\kappa_t$  tegen te komen na  $t$  observaties, bij gegeven  $\vartheta$ .

Nu kan het Dirichletmodel voor statistische gevolgtrekking worden uiteengezet. Beschouw een a-priori-Dirichletverdeling  $f$  die de inschattingen van de speler omtrent  $\vartheta$  weergeeft. Na  $t$  observaties van ware toestanden uit  $\Omega$  kunnen we met behulp van de daaruit volgende kansfunctie  $L_t$  deze inschattingen aanpassen. Dit gebeurt door gebruik te maken van de regel van Bayes. We zoeken namelijk de kans om een bepaalde  $\vartheta$  tegen te komen, gegeven een aantal observaties (voorgesteld door  $\kappa_t$ ); dus

$$P(\vartheta | \kappa_t) = \frac{P(\vartheta) P(\kappa_t | \vartheta)}{\int_{\forall \vartheta} P(\vartheta) P(\kappa_t | \vartheta) d\vartheta}. \quad (4.5)$$

We kunnen dit als volgt herschrijven met hierboven gedefinieerde begrippen, namelijk

$$f(\vartheta | \alpha + \kappa_t) = \frac{f(\vartheta | \alpha) L_t(\vartheta)}{\int_{\forall \vartheta} f(\vartheta | \alpha) L_t(\vartheta) d\vartheta}. \quad (4.6)$$

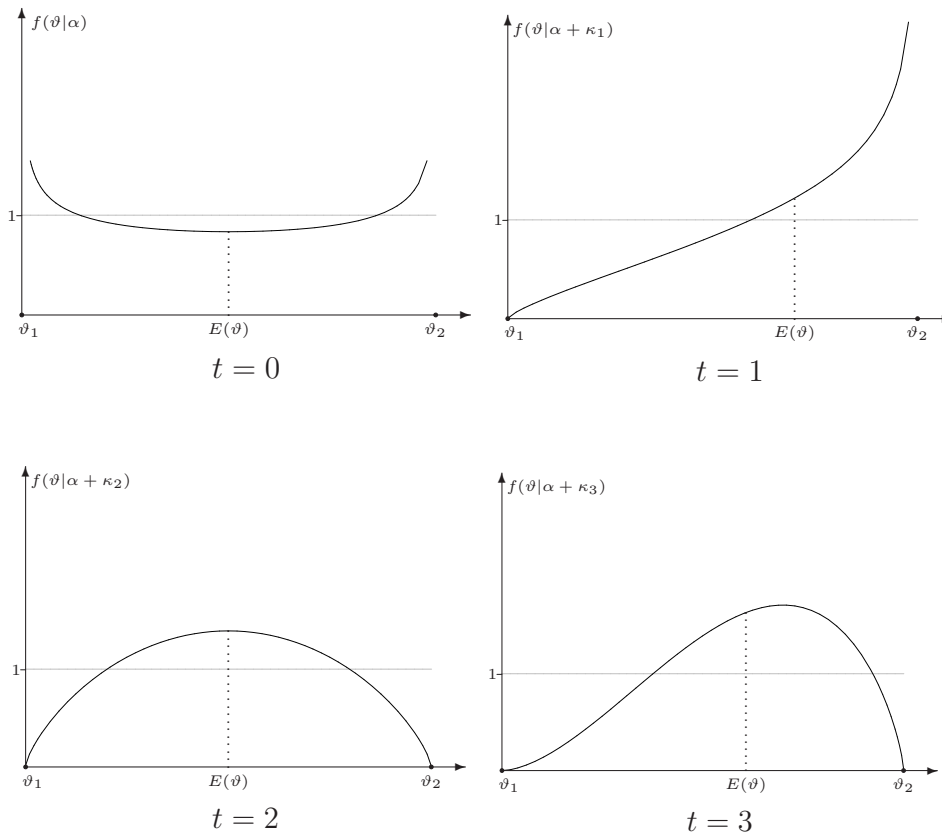
Hier hebben we de a-posteriori-verdeling reeds aangegeven als een Dirichletverdeling met parameter  $\alpha + \kappa_t$ . Dat dit zo is volgt enerzijds uit het feit dat de noemer in het rechterlid van (4.6) onafhankelijk is van  $\vartheta$  en dus als een normeringsconstante kan worden beschouwd. Er geldt anderzijds dat

$$f(\vartheta | \alpha) L_t(\vartheta) \propto \prod_{k=1}^N \vartheta_k^{\kappa_t(k) + \alpha_k - 1},$$

waaruit na normeren volgt dat de bekomen a-posteriori-verdeling inderdaad de Dirichletverdeling  $f(\vartheta | \alpha + \kappa_t)$  is. We hebben in (4.5) impliciet verondersteld dat de noemer in het rechterlid niet nul is. Gezien  $\int_{\forall \vartheta} P(\vartheta) d\vartheta = 1$ , is een voldoende voorwaarde hiervoor dat alle  $\vartheta_k > 0$  daar dan  $P(\kappa_t | \vartheta) > 0, \forall \kappa_t$ . Dit werd reeds geanticipeerd in definitie 4.5.

We zien dus dat Dirichletverdelingen een *toegevoegde familie waarschijnlijkheidsverdelingen* zijn voor multinomiale bemonstering. Dit betekent dat indien de a-priori-verdeling binnen de familie ligt dat dan ook de a-posteriori-verdeling in die familie ligt voor elke multinomiale kansfunctie. Omwille van deze handige eigenschap worden Dirichletverdelingen hier gekozen. Een bijkomende reden is dat ze gebruikt worden in veel Bayesiaanse modellen voor een initieel gebrek aan gegevens over  $\vartheta$ .

We geven in figuur 4.1 nog een voorbeeld van een a-priori-Dirichletverdeling en de daaruit volgende a-posteriori-Dirichletverdelingen. De verwachtingswaarde van  $\vartheta$  werd met een stippellijn aangegeven. De bijbehorende gegevens staan in tabel 4.1.



**Figuur 4.1:** Een a-priori-Dirichletverdeling met  $\alpha = (3/4, 3/4)$  en drie daaruit volgende a-posteriori-Dirichletverdelingen.

**Tabel 4.1:** De gegevens voor figuur 4.1.

$t$	$\alpha = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\kappa_t$	$E(\vartheta)$
0	(0, 0)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1	(0, 1)	$\left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$
2	(1, 1)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
3	(1, 2)	$\left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right)$

### 4.3.2 Het Dirichletmodel en speltheorie

We gaan het model uit §4.3.1 nu toepassen op een spel in de strategische vorm. We doen daarvoor volgende identificaties

$$\begin{aligned} \omega_k &\leftrightarrow s^{-i} \text{ (b.v. } k), & \vartheta &\leftrightarrow \sigma^{-i}, \\ N &\leftrightarrow N^{-i}, & \alpha &\leftrightarrow \beta_0 \rho_0^{-i}. \end{aligned}$$

Hierbij zijn  $s^{-i} \in S^{-i}$ ,  $\sigma^{-i}, \rho_0^{-i} \in \mathring{\Sigma}^{-i}$  en  $\beta_0 \in \mathbb{R}^+$ .  $\beta_0$  wordt de *hyperparameter* genoemd. Er geldt dus dat

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \alpha(l) &\leftrightarrow \sum_{l=1}^{N^{-i}} \beta_0 \rho_0^{-i}(l) = \beta_0, & (4.7) \\ \frac{\alpha}{\sum_{l=1}^N \alpha(l)} &\leftrightarrow \rho_0^{-i}(l). \end{aligned}$$

We hebben dan de Dirichletverdeling  $f(\sigma^{-i} | \beta_0, \rho_0^{-i})$  die de kans weergeeft dat de tegenspeler een bepaalde strategie speelt. De observaties vervat in  $\kappa_t$  zijn niets anders dan de in  $t$  sessies door de tegenspeler gespeelde zuivere strategieën. De kansfunctie  $L_t(\sigma^{-i})$  geeft dan de kans weer de reeks zuivere strategieën in  $\kappa_t$  tegen te komen als we veronderstellen dat de tegenspeler een strategie  $\sigma^{-i}$  speelt. Bemerkt dus dat de veronderstelling van multinomiale bemonstering hier overeenkomt met de veronderstelling dat de tegenspeler een bepaalde vaste strategie  $\sigma^{-i}$  speelt. Deze veronderstelling zal belangrijk blijken en we komen hier nog op terug in §5.2.1.

Laten we nu even een interpretatie geven aan  $\rho_0^{-i}$ . We beschouwen  $\rho_0^{-i}$  als de strategie waarvan de speler op voorhand – voordat er een sessie is gespeeld – veronderstelt dat ze gespeeld zal worden door zijn tegenspeler. Berekenen we namelijk de verwachtingswaarde van de a-priori-Dirichletverdeling

$$\begin{aligned} E(\sigma^{-i}) &\stackrel{(4.4)}{=} \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}}{\sum_{k=1}^{N^{-i}} \beta_0 \rho_0^{-i}} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \rho_0^{-i}, \end{aligned}$$

dan zien we dus dat dit  $\rho_0^{-i}$  is.

We kunnen nu naar de a-posteriori-verdeling kijken om te proberen een zelfde interpretatie te geven aan de daar optredende parameters. We zoeken dus een  $\chi_t(\beta_0) \in \mathbb{R}^+$  en  $\psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i}) \in \mathring{\Sigma}^{-i}$  waarvoor geldt dat

$$\chi_t \psi_t^{-i} = \beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t. \quad (4.8)$$

We kunnen dit doen door het volgende te schrijven

$$\begin{aligned}\chi_t \psi_t^{-i}(l) &= \beta_0 \rho_0^{-i}(l) + \kappa_t(l) \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^{N-i} \chi_t \psi_t^{-i}(l) &= \sum_{l=1}^{N-i} (\beta_0 \rho_0^{-i}(l) + \kappa_t(l)) \\ \Rightarrow \chi_t(\kappa_t) &= \beta_0 + t.\end{aligned}$$

Hieruit en uit (4.8) volgt verder nog dat

$$\psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i}) = \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t}.$$

Nu kunnen we ook een interpretatie geven aan  $\beta_0$ . De hyperparameter  $\beta_0$  geeft weer hoe hard de speler overtuigd is dat zijn initiële veronderstelling correct is. Deze parameter geeft namelijk een aantal virtuele sessies weer. Hoe groter  $\beta_0$  is, des te meer sessies moeten er worden gespeeld om aan de verzamelde observaties van deze reële sessies een gelijk gewicht toe te kennen.<sup>5</sup> Hier zal in §4.3.5 nog dieper op worden ingegaan.

Als we figuur 4.1 en tabel 4.1 in een speltheoretisch licht bekijken zien we dat  $\beta_0 = 3/2$  en dat  $E(\vartheta)$  overeenkomt met  $\rho_t^{-i}$ .

### 4.3.3 Het Dirichletmodel en lineaire previsions

We hebben in §4.2.2 gezien hoe we een met een waarschijnlijkheidsverdeling  $f$  corresponderende lineaire previsie  $P_f$  kunnen schrijven. Voor Dirichletverdelingen passen we onze notatie als volgt aan

$$P(X | \beta_0, \rho_0^{-i}) = \int_{\Sigma^{-i}} X(\sigma^{-i}) f(\sigma^{-i} | \beta_0, \rho_0^{-i}) d\sigma^{-i},$$

waarbij  $X \in \mathcal{L}(\Sigma^{-i})$  is en de onderindex  $f$  weggelaten wordt als het gaat om een Dirichletverdeling. Deze lineaire previsie  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$  wordt het *precieze Dirichletmodel* genoemd bepaald door  $\beta_0$  en  $\rho_0^{-i}$ . Uit de definitie van  $\pi_f^{-i}$  in (4.3) zien we dat dit zwaartepunt niets anders is dan als de verwachtingswaarde van  $\sigma^{-i}$  onder de waarschijnlijkheidsverdeling. Er geldt dus voor een met een Dirichletverdeling corresponderende lineaire previsie dat  $\rho_0^{-i} = \pi^{-i}$ .

We willen nu ons precieze Dirichletmodel  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$  aanpassen na het observeren van het spel van de tegenspeler. Hiervoor moeten we dan enkel de

5. In [11, §2.5], worden 1 en 2 als goede waarden voor  $\beta_0$  voorgesteld en worden deze keuzes ook beargumenteerd.



parameters  $\beta_0$  en  $\rho_0^{-i}$  als volgt veranderen (zie §4.3.2)

$$\begin{aligned}\beta_0 &\xrightarrow{\kappa_t} \beta_t = \chi_t(\beta_0) = \beta_0 + t, \\ \rho_0^{-i} &\xrightarrow{\kappa_t} \rho_t^{-i} = \psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i}) = \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t},\end{aligned}$$

waarbij  $\kappa_t$  zoals eerder aangegeven de gegevens uit observatie bevat. Het aangepaste precieze Dirichletmodel is dan  $P(X | \beta_t, \rho_t^{-i})$ .

#### 4.3.4 Het Dirichletmodel en coherente onderprevisies

We kunnen nu het *imprecieze Dirichletmodel*  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0)$  uiteenzetten, bepaald door  $\beta_0$  en  $M_0 \subseteq \dot{\Sigma}^{-i}$ . Hierbij is  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0)$  de onderenveloppe van de precieze Dirichletmodellen  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$  met  $\rho_0^{-i} \in M_0$ , dus

$$\underline{P}(X | \beta_0, M_0) = \inf \{ P(X | \beta_0, \rho_0^{-i}) \mid \rho_0^{-i} \in M_0 \}.$$

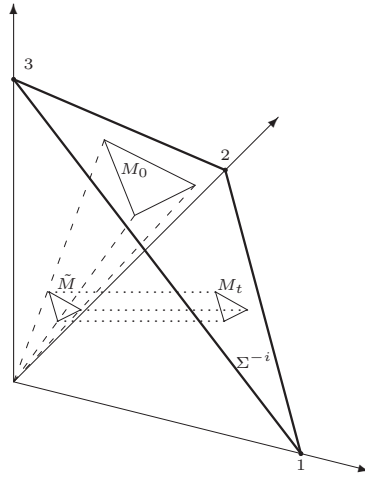
Bemerk dat we veronderstellen dat de hyperparameter  $\beta_0$  voor al deze lineaire previsions  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$  gelijk is. Dit is een bewuste keuze die op het einde van dit onderdeel verantwoord zal worden.

Weerom gaan we kijken hoe we ons imprecieze Dirichletmodel  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0)$  kunnen aanpassen na observatie van de door de tegenspeler gespeelde strategieën. In [6, §4] wordt er aangetoond dat er een uniek aangepast imprecies Dirichletmodel  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0, \kappa_t)$  bestaat dat coherent is met  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0)$ . Een bijkomende eis nodig om coherentie te verzekeren is dat  $\beta_0$  onafhankelijk is van het aantal sessies  $t$  (zie hiervoor [11, §2.5]). Om dit aangepaste imprecieze Dirichletmodel te berekenen wordt gebruik gemaakt van natuurlijke uitbreiding (zie §3.3.5) en ook een aangepaste versie hiervan, reguliere uitbreiding (zie [7, §J]). Het blijkt dat deze aangepaste  $\underline{P}$  niets anders is dan de onderenveloppe van de aangepaste precieze Dirichletmodellen, namelijk

$$\begin{aligned}\underline{P}(X | \beta_0, M_0, \kappa_t) &= \inf_{\rho_0^{-i} \in M_0} P(X | \chi_t(\beta_0), \psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i})) \\ &= \inf_{\rho_0^{-i} \in M_0} P(X | \beta_0 + t, \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t}) \\ &= \inf_{\rho_0^{-i} \in M_0} \int_{\Sigma^{-i}} X(\sigma^{-i}) f(\sigma^{-i} | \beta_0 + t, \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t}) d\sigma^{-i} \\ &= \underline{P}(X | \chi_t(\beta_0), \psi_t^{-i}(\beta_0, M_0)).\end{aligned}$$

We hebben dus gevonden dat bij aanpassing enkel de parameters  $\beta_0$  en  $\rho_0^{-i}$  als volgt moeten worden veranderd

$$\begin{aligned}\beta_0 &\xrightarrow{\kappa_t} \beta_t = \chi_t(\beta_0) = \beta_0 + t, \\ M_0 &\xrightarrow{\kappa_t} M_t = \psi_t^{-i}(\beta_0, M_0) = \left\{ \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t} \mid \rho_0^{-i} \in M_0 \right\}.\end{aligned}$$



**Figuur 4.2:** Gelijkvormigheid van  $M_0$  en  $M_t$ , geïllustreerd voor  $N^{-i} = 3$ .

Het aangepaste imprecieze Dirichletmodel noteren we dan als  $\underline{P}(X | \beta_t, M_t)$ .

Een interessante eigenschap van  $\psi_t^{-i}(\beta_0, M_0)$  is dat na aanpassing de vorm van  $M_0$  behouden blijft. Dit kunnen we duidelijk maken door  $\psi_t^{-i}(\beta_0, M_0)$  als volgt te schrijven

$$M_t = \psi_t^{-i}(\beta_0, M_0) = \left\{ \frac{\beta_0}{\beta_0 + t} \rho_0^{-i} + \frac{\kappa_t}{\beta_0 + t} \mid \rho_0^{-i} \in M_0 \right\}. \quad (4.9)$$

We kijken nu naar  $\rho_0^{-i}$  en  $\kappa_t$  als punten van  $\mathbb{R}^{N^{-i}}$ . De eerste term van de som in het rechterlid kunnen we zien als een homotetie van alle  $\rho_0^{-i} \in M_0$  met een factor  $0 < \beta_0/(\beta_0 + t) < 1$  die  $M_0$  omzet in  $\tilde{M}$ . De tweede term is dan een translatie over  $\kappa_t/(\beta_0 + t)$  die  $\tilde{M}$  omzet in  $M_t$ . Het is duidelijk dat  $M_t \subset \Sigma^{-i}$ , aangezien ten eerste  $\sum_{l=1}^{N^{-i}} \psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i})(l) = 1, \forall \rho_0^{-i} \in M_0$  en ten tweede de richtingscoëfficiënt van  $\kappa_t$  altijd een element is van de verzameling van richtingscoëfficiënten van de punten van  $\Sigma^{-i}$ . We illustreren voorgaande in figuur 4.2.

We komen tenslotte nog even terug op de veronderstelling dat  $\beta_0$  een unieke waarde wordt toegekend. Stel even dat er verschillende hyperparameters zouden gebruikt worden, namelijk

$$\underline{P}(X | \{\beta_0(\rho_0^{-i}) \mid \rho_0^{-i} \in M_0\}, M_0) = \inf \{P(X | \beta_0(\rho_0^{-i}), \rho_0^{-i}) \mid \rho_0^{-i} \in M_0\}.$$

Dit heeft tot gevolg dat de aanpassing niet de vorm van  $M_0$  behoudt, wat we kunnen inzien door naar (4.9) te kijken en daar  $\beta_0$  variabel te maken. Het behoud van de vorm van  $M_0$  zal in §5.2.3 van groot belang blijken.

### 4.3.5 Het Dirichletmodel en waarschijnlijkheden

Als we voor een precies Dirichletmodel  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$  de waarschijnlijkheid  $P(I_l | \kappa_t)$  willen kennen waarmee een bepaalde strategie  $l \in S^{-i}$  gespeeld zal worden, moeten we gewoon de verwachtingswaarde van  $l$  berekenen. We vinden dus dat

$$P(I_l | \kappa_t) = \rho_t^i(l) = \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}(l) + \kappa_t(l)}{\beta_0 + t}.$$

Hetzelfde kunnen we doen voor een imprecies Dirichletmodel  $\underline{P}(X | \beta_0, M_0)$ . We wensen in dat geval dan zowel de onderwaarschijnlijkheid  $\underline{P}(I_l | \kappa_t)$  als de bovenwaarschijnlijkheid  $\overline{P}(I_l | \kappa_t)$  te kennen. Dit doen we door  $P(I_l | \kappa_t)$  voor alle precieze Dirichletmodellen overeenkomend met  $M_0$  te minimaliseren respectievelijk te maximaliseren. Nemen we  $M_0 = \overset{\circ}{\Sigma}^{-i}$ , dan krijgen we

$$\begin{aligned} \underline{P}(I_l | \kappa_t) &= \inf_{\rho_0^{-i} \in \overset{\circ}{\Sigma}^{-i}} \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}(l) + \kappa_t(l)}{\beta_0 + t} = \frac{\kappa_t(l)}{\beta_0 + t} \\ \overline{P}(I_l | \kappa_t) &= \sup_{\rho_0^{-i} \in \overset{\circ}{\Sigma}^{-i}} \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}(l) + \kappa_t(l)}{\beta_0 + t} = \frac{\beta_0 + \kappa_t(l)}{\beta_0 + t} \end{aligned}$$

Voordat de spelers een sessie hebben gespeeld, zal  $\kappa_0(l) = 0, \forall l$ . Dit betekent dat ook  $\underline{P}(I_l | \kappa_0) = 0$  en  $\overline{P}(I_l | \kappa_0) = 1$ , wat overeenkomt met een nietszeggend model. Als er een aantal sessies gespeeld zijn en dus een aantal strategiekeuzes zijn geobserveerd, zal de imprecisie

$$\overline{P}(I_l | \kappa_t) - \underline{P}(I_l | \kappa_t) = \frac{\beta_0}{\beta_0 + t}$$

afnemen met het aantal gespeelde sessies  $t$ . We zien dus dat de hoeveelheid gegevens rechtstreeks wordt weerspiegeld in de precisie van de inschattingen.

We keren nu terug op de betekenis en invloed van de hyperparameter  $\beta_0$ . We kunnen de waarschijnlijkheden  $P(I_l | \kappa_t)$ ,  $\underline{P}(I_l | \kappa_t)$  en  $\overline{P}(I_l | \kappa_t)$  zien als waargenomen frequenties, indien we  $\beta_0$  als een aantal virtuele sessies beschouwen. De invloed van  $\beta_0$  op  $P(I_l | \kappa_t)$  blijft beperkt tot het bepalen van een gewicht van de initiële inschatting  $\rho_0^{-i}$  en dus het aantal sessies dat nodig is om aan de observaties een gelijk gewicht toe te kennen. De invloed op de imprecieze waarschijnlijkheden is van tweeërlei aard. Ten eerste opnieuw het aantal benodigde sessies voordat de observaties even belangrijk worden en ten tweede de snelheid waarmee de imprecisie afneemt.

## 4.4 Bronvermelding

De belangrijkste bron voor dit hoofdstuk was [6]. Voor §4.2 werd ook gebruik gemaakt van [7]. Verder werd [11] voor §4.3 gebruikt. Voor §4.3.1 werd ook gebruik gemaakt van [2] (met name van de appendix van hoofdstuk 2).

# Hoofdstuk 5

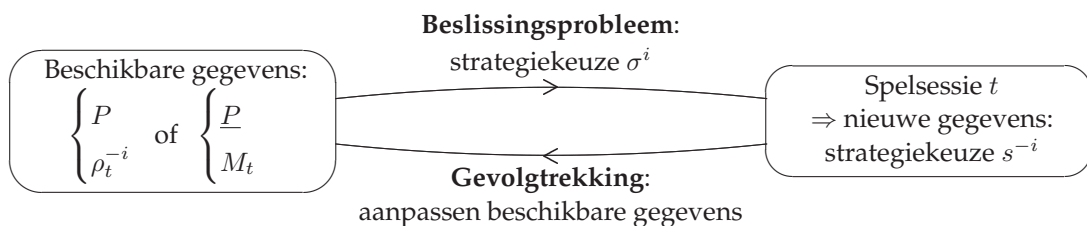
## Speltheoretisch leren

### 5.1 Inleiding

#### 5.1.1 Wat is (het doel van) een leermethode?

Een speltheoretisch leermethode bestaat uit de regels die de individuele spelers gebruiken om te leren uit reeds gespeelde sessies van een spel. Deze regels moeten niet gezien worden als een methode van mogelijk gedrag, maar eerder als een handleiding om de keuzes van de spelers te gidsen. Als we spreken over een handleiding, moeten we nadenken over het doel dat we willen bereiken. Het bekomen van een zo groot mogelijke opbrengst is duidelijk een rationeel doel. Dit doet ons vermoeden dat de spelers zullen streven naar Pareto-optimale strategieprofielen. Als we echter rekening houden met het feit dat we spelen zonder samenwerking veronderstellen, dan lijken evenwichten (die vaak toch Pareto-optimaal zijn) betere kandidaten voor een streefdoel.

In hoofdstuk 6 gaan we na in hoeverre dit doel bereikt kan worden. In dit hoofdstuk beschrijven we de gebruikte leermethodes op zich. Deze leermethodes worden opgebouwd door combinatie van de benadering van beslissingsproblemen uit §4.2 en de theorie over gevolgtrekking op basis van de Dirichletverdeling uit §4.3. We geven de leercyclus die het gevolg is van deze combinatie schematisch weer in figuur 5.1.



Figuur 5.1: Schematische weergave van de leercyclus.

### 5.1.2 Notaties

Aangezien we een bestudeerd spel verschillende malen na elkaar spelen, moeten we een notatie hebben om de verschillende sessies te ordenen. Dit doen we met een  $t \in \mathbb{N}^+$ . We gebruiken onderindices om aan te duiden over welke sessie we het hebben bij bijvoorbeeld een strategieprofiel  $(s_t)$ .

Als we een spel vele malen hebben gespeeld onthouden we welke zuivere strategieën werden gespeeld en we noemen dit de *geschiedenis* van het spel. We noteren een oneindige geschiedenis (wanneer men oneindig veel sessies speelt) van een spel door

$$\zeta = (s_1, s_2, \dots, s_t, \dots) \in \mathcal{Z}.$$

We gebruiken voor een eindige geschiedenis die ter beschikking is voor sessie  $t + 1$  de notatie

$$\zeta_t = (s_1, s_2, \dots, s_t) \in \mathcal{Z}_t.$$

Hierbij hebben we onmiddellijk de verzamelingen van mogelijke geschiedenissen  $\mathcal{Z}$  en  $\mathcal{Z}_t$  gedefinieerd.

In een geschiedenis houdt men rekening met de volgorde dat bepaalde strategieën gespeeld worden, maar soms moeten we enkel weten hoe vaak een bepaalde strategie gespeeld wordt. Zoals in §4.3.1 noteren we het aantal maal dat een zuivere strategie  $s^i$  gespeeld wordt in de  $t$  sessies vervat in  $\zeta_t$  door  $\kappa_t(\zeta_t)(s^i) \in \mathbb{N}$  of kort  $\kappa_t(s^i)$ .

Het zal nodig zijn dat een speler een inschatting maakt over welke strategie zijn tegenspeler zal kiezen.

#### **Definitie 5.1 (inschattingsregel)**

*Een inschattingsregel voor speler  $i$  is een functie*

$$\mu_t^i : \mathcal{Z}_t \longrightarrow \Sigma^{-i} : \zeta_t \rightarrow \mu_t^i(\zeta_t)$$

*die de inschatting voorstelt van speler  $i$  van de strategie die zijn tegenspeler op  $t + 1$  zal spelen.*

Een inschattingsregel  $\mu_t^i(\zeta_t)$  kan één strategie zijn, maar ruimer gezien ook een deelverzameling van  $\Sigma^{-i}$ . We laten doorgaans het argument weg (i.e. we schrijven  $\mu_t^i$  voor  $\mu_t^i(\zeta_t)$ ). We gebruiken ook  $\mu^i = (\mu_1^i, \mu_2^i, \dots)$  voor een oneindige aantal sessies. Het is duidelijk dat de bespreking in §4.3 over gevolgtrekking relevant is voor het kiezen van een inschattingsregel.

Een speler zal ook een manier moeten vinden om een strategiekeuze te maken met de gegevens die hij heeft.

**Definitie 5.2 (gedragsregel)**

Een gedragsregel voor speler  $i$  is een functie

$$\phi_t^i : \mathcal{Z}_t \longrightarrow \Sigma^i : \zeta_t \rightarrow \phi_t^i(\zeta_t)$$

die zijn strategiekeuze bepaald voor een sessie  $t + 1$ .

Een inschattingsregel  $\phi_t^i(\zeta_t)$  moet altijd één strategie zijn. Opnieuw laten we doorgaans het argument  $\zeta_t$  weg. Om een profiel van gedragsregels aan te geven noteren we

$$\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2).$$

Wanneer er een oneindig aantal sessies gespeeld wordt, gebruiken we de notaties  $\phi^i = (\phi_1^i, \phi_2^i, \dots)$  en  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ . We zien dat §4.2 over beslissingsproblemen ons kan leiden bij de keuze van een gedragsregel.

**5.1.3 Cournot-aanpassing**

We geven hier een eenvoudig voorbeeld van een leermethode afkomstig uit de economie, namelijk *Cournot-aanpassing*. Dit doen we met de bedoeling enkele aspecten van leermethodes te tonen, die we ook zullen tegenkomen in de leermethode die we later zullen behandelen.

Beschouw twee bedrijven (de spelers) die kunnen beslissen hoeveel liter drinkyoghurt ze gaan produceren (de strategieën  $s^i \in [0, \infty)$  dus)<sup>1</sup>. De opbrengst  $u^i(\cdot, s^{-i})$ , die afhankelijk is van investeringen (b.v. voor installaties), productiekosten (b.v. de prijs van melk) en verbruik, is voor elk bedrijf een strikt concave functie van zijn productievolume  $s^i, \forall s^{-i} \in S^{-i}$ . Elke week kan het productievolume aangepast worden en beide bedrijven beslissen dit op dezelfde dag, dus zonder de strategie van de tegenspeler te kennen. Veronderstel dat de twee bedrijven in week  $t$  een strategieprofiel  $s_t$  spelen, dan zal de Cournot-aanpassing erin bestaan dat elk bedrijf een beste antwoord hierop kiest als volgende strategie (dit is de leermethode), dus

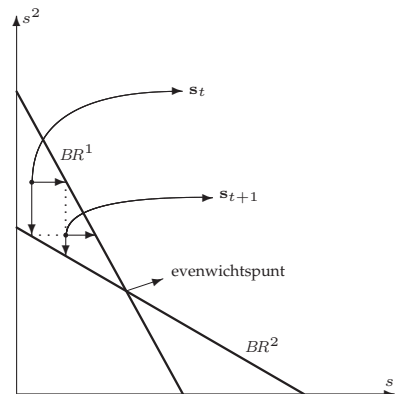
$$s_{t+1}^i = BR^i(s_t^{-i}).$$

Aangezien de opbrengst een strikt concave functie is, is  $BR^i$  uniek.

In Cournot-aanpassing is de inschattingsregel dan  $\mu_t^i(\zeta_t) = s_t^{-i}$ . De gedragsregel is hier  $s_{t+1}^i = \phi_t^i(\zeta_t) = BR^i(\mu_t^i(\zeta_t))$ .

We kunnen opeenvolgende stappen van Cournot-aanpassing grafisch weer geven door in een assenkruis  $(s^1, s^2)$ ,  $BR^1$  en  $BR^2$  uit te zetten. We kunnen dan ook de opeenvolgende strategieprofielen uitzetten, indien we een willekeurig beginprofiel  $s_t$  kiezen. Dit wordt gedaan in figuur 5.2. We hebben hierbij

1. Bemerkt dat, in tegenstelling tot in hoofdstuk 2, we hier (louter voor dit voorbeeld) te maken hebben met een strategieruimte met een oneindig aantal strategieën.



Figuur 5.2: Illustratie van Cournot-aanpassing.

natuurlijk een welbepaalde keuze gemaakt wat betreft de vorm van de  $BR$ -curves. Deze hadden evengoed niet kunnen snijden. Ze moeten in het algemeen enkel een afbeelding zijn (dus niet noodzakelijk lineair). We kunnen op figuur 5.2 ook de dynamica van het proces aflezen. In het geval weergegeven op de figuur convergeert het profiel van gedragsregels naar een evenwicht.

## 5.2 Leren met het Dirichletmodel

### 5.2.1 Fictief spelen

We beschouwen een eindig tweepersoonsspel zoals dit werd uiteengezet in hoofdstuk 2. We veronderstellen dat veel sessies van dit spel worden gespeeld.

In de leermethode die wij zullen gebruiken, deze van *fictief spelen*, veronderstellen de spelers dat hun tegenspeler een onbekende maar vaste gemengde strategie speelt. Dit is louter een veronderstelling, aangezien ze allebei hun eigen strategie zullen aanpassen. We beschouwen dus in feite spelers met een beperkt inschattingsvermogen, aangezien ze hun tegenspeler onderschatten. Daar de spelers veronderstellen dat hun tegenspeler een onbekende vaste strategie speelt zullen ze niet proberen de toekomstige strategiekeuze van hun tegenspeler te beïnvloeden.

We bekijken enkel spelen waarbij de spelers hun strategiekeuze voor een sessie tegelijkertijd maken, dus zonder te weten wat de tegenspeler kiest. Gegeven hun inschatting  $\mu_t^i$ , zullen de spelers een gedragsregel  $\phi_t^i$  kiezen die de te verwachten opbrengst kan maximaliseren. Bemerkt dat dit niet betekent dat de opbrengst maximaal zal zijn, aangezien de inschatting  $\mu_t^i$  veelal niet volledig correct zal zijn.

Alhoewel in de literatuur (b.v. [2],[12]) de definitie van een welbepaalde inschattingsregel meestal deel uitmaakt van fictief spelen, zullen we dit hier omwille van de helderheid van het betoog uitstellen tot de volgende onderdelen.

In §5.2.2 wordt de leermethode besproken die klassiek de naam fictief spelen krijgt en in §5.2.3 breiden we deze methode uit.

### 5.2.2 De precieze leermethode

We gaan hier eerst de leermethode uiteenzetten gebaseerd op het precieze Dirichletmodel uit §4.3.4. Dit is een goede voorbereiding op de methode die we uiteindelijk beogen en die wordt besproken in §5.2.3.

De speler modelleert zijn inschattingen over de strategiekeuze van zijn tegenstander volgens een precies Dirichletmodel  $P(X | \beta_0, \rho_0^{-i})$ . Vooraleer hij kan beginnen spelen moet hij dus de beginparameters  $\beta_0$  en  $\rho_0^{-i}$  vastleggen. Het vastleggen van  $\rho_0^{-i}$  is voor de speler hetzelfde als het bepalen van de strategie die hij verwacht dat de tegenspeler zal kiezen. De keuze van  $\rho_0^{-i}$  is vrij, maar enkele opmerkingen kunnen gemaakt worden. De speler kan zich voor de keuze van  $\rho_0^{-i}$  enkel baseren op de gegevens die hij over het spel heeft. Dit is hier minimaal een opbrengstmatrix waarin enkel zijn eigen opbrengsten in vermeld staan. Hoe dan ook heeft hij voldoende gegevens om een niet geheel willekeurige keuze te maken. Als voorzichtige keuze valt bijvoorbeeld initieel te veronderstellen dat zijn tegenspeler ( $-i$ ) een strategie zal spelen die zijn ( $i$ ) opbrengst minimaliseert en hem dus ‘dwingt’ een maximin-strategie te spelen.

Wat geldt voor de eerste strategie  $-\rho_0^{-i}$  als inschatting van de speler voor de strategiekeuze van zijn tegenspeler  $-$  kan onmiddellijk veralgemeend worden. We hebben dus de volgende inschattingsregel.

#### **Definitie 5.3 (inschattingsregel van de precieze leermethode)**

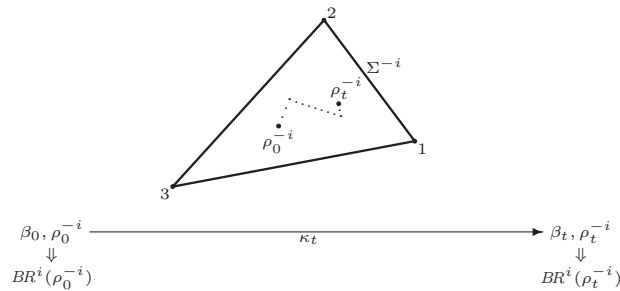
*De inschattingsregel van de leermethode gebaseerd op het precieze Dirichletmodel is*

$$\begin{aligned}\mu_t^i &= \psi_t^{-i}(\beta_0, \rho_0^{-i}) \\ &= \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t} \\ &= \rho_t^{-i}.\end{aligned}$$

De speler heeft dus een manier om aan de hand van zijn observaties van de door zijn tegenspeler gespeelde zuivere strategieën zijn inschattingen aan te passen.

Hij moet nu ook beslissen welke strategie hij zelf zal spelen. In §4.2.2 hebben we aangetoond dat de beste keuze voor speler  $i$  niets anders is dan een





**Figuur 5.3:** Illustratie van leren met het precieze Dirichletmodel.

Bayes-strategie. De met ons precies Dirichletmodel  $P(X | \beta_t, \rho_t^{-i})$  corresponderende waarschijnlijkheidsverdeling is niets anders dan de Dirichletverdeling  $f(\sigma^{-i} | \beta_t, \rho_t^{-i})$ . Deze verdeling heeft als zwaartepunt  $\rho_t^{-i}$ , zoals we gezien hebben in §4.3.4. De corresponderende Bayes-strategie is dan een beste antwoord hierop. We vinden dus de volgende gedragsregel.

**Definitie 5.4 (gedragsregel van de precieze leermethode)**

De gedragsregel van de leermethode gebaseerd op het precieze Dirichletmodel is

$$\phi_t^i \in BR^i(\rho_t^{-i}) = BR^i(\mu_t^i).$$

Gezien over het algemeen  $BR^i(\rho_t^{-i})$  meer dan één strategie zal bevatten, moet er in de praktijk nog een methode zijn om één strategie uit te kiezen. Er kan bijvoorbeeld met een toevalsgenerator een strategie uit  $BR^i(\rho_t^{-i})$  gekozen worden na het aanbrengen van een uniforme waarschijnlijkheidsverdeling over deze verzameling. De keuze kan eventueel ook op deterministische wijze gebeuren door bijvoorbeeld het zwaartepunt van de convexe  $BR^i(\rho_t^{-i})$  te nemen. De gebruikte waarschijnlijkheidsverdeling of deterministische methode mogen hierbij gerust afhankelijk zijn van  $t$ .

Bovenstaande leermethode wordt schematisch weergegeven in figuur 5.3. We hebben hierin de evolutie van de inschatting  $\rho_t^{-i}$  waarheidsgetrouw weergegeven, namelijk altijd in de richting van een zuivere strategie. Bemerkt dat we de Dirichletverdeling in deze leermethode niet meer expliciet nodig hebben.

### 5.2.3 De imprecieze leermethode

Wanneer we werken met het imprecieze Dirichletmodel, wordt de keuze van initiële inschattingen over de strategiekeuze van de tegenstander veel eenvoudiger en onafhankelijk van eventuele gebrekkige gegevens over het spel. We nemen namelijk  $\hat{\Sigma}^{-i}$  als initiële  $M_0$ , wat overeenkomt met een nietszeggende

inschatting. Dit is een goede voorstelling van een volledig gebrek aan informatie.

Zoals in §5.2.2 zouden we dan volgende inschattingsregel kunnen poneren (quod non)

$$\begin{aligned}\mu_t^i &= \psi_t^{-i}(\beta_0, M_0) \\ &= \left\{ \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t} \mid \rho_0^{-i} \in M_0 \right\} \\ &= M_t.\end{aligned}$$

Bemerk dat we definitie 5.1 hier in de ruime zin hebben interpreteren en dat we toelaten dat  $\mu_t^i \subseteq \overset{\circ}{\Sigma}^{-i}$ . Gezien de vorm van de convexe  $\overset{\circ}{\Sigma}^{-i}$  na aanpassing niet verandert zal  $M_t$  ook convex zijn.

Dit lijkt een natuurlijke veralgemening van de inschattingsregel gebruikt in het precieze geval. We zullen echter een andere inschattingsregel vastleggen. Hiervoor bekijken we waarop we ons zullen baseren bij de keuze van een gedragsregel. We zien in §4.2.3 dat we daarvoor hoe dan ook gebruik moeten maken van

$$M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)} = \left\{ \pi_f^{-i} \in \Sigma^{-i} \mid P_f \in \mathcal{M}(\underline{P}(X|\beta_t, M_t)) \right\}. \quad (5.1)$$

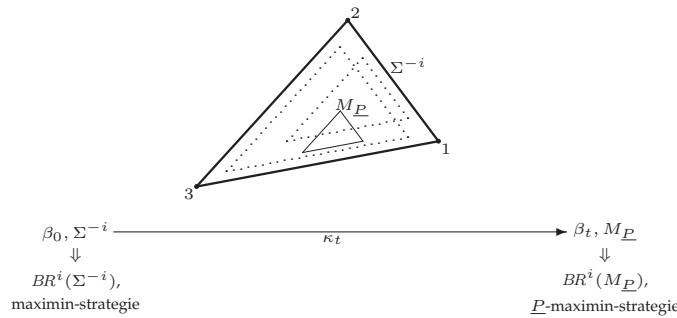
Waaruit bestaat deze  $M_{\underline{P}}$  (verkorte notatie voor  $M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)}$ ) en wat is het verband met  $M_t$ ? We kunnen alvast opmerken dat  $M_{\underline{P}}$  per definitie gesloten is (zie stelling 4.5), maar dat  $M_t$  daarentegen niet noodzakelijk gesloten is (b.v.  $\overset{\circ}{\Sigma}^{-i}$ ). Uit (5.1) maken we op dat  $M_{\underline{P}}$  bestaat uit alle zwaartepunten van waarschijnlijkheidsverdelingen die corresponderen met lineaire previsions die  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$  domineren. Uit de constructie van  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$  volgt onmiddellijk dat  $M_t$  bestaat uit alle zwaartepunten van Dirichletverdelingen die corresponderen met de precieze Dirichletmodellen, waarvan  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$  de onderenveloppe is. Deze precieze Dirichletmodellen vormen dus ook een verzameling  $\mathcal{M}_{D, \beta_0}$  van lineaire previsions die  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$  domineren. We zien dus dat  $\mathcal{M}_{D, \beta_0} \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$  waaruit volgt dat  $M_t \subseteq M_{\underline{P}}$ . We kunnen ons nu afvragen of de verzameling  $M_{\underline{P}}$  die we gebruiken voor besluitvorming wel representatief is, i.e. dat ze voldoende overeenkomt met de verzameling  $M_t$  die we gebruiken voor gevolgtrekking. Dit wordt gegarandeerd door [6, theorem 8], waar wordt bewezen dat  $M_{\underline{P}(X|\beta, M)}$  de sluiting is van een convexe  $M \subseteq \overset{\circ}{\Sigma}^{-i}$ , i.e.  $M_{\underline{P}(X|\beta, M)} = M \cup \partial M$ . Dus  $M_{\underline{P}}$  is representatief, gezien het de sluiting van de convexe  $M_t$  is.

Hieruit volgt dan de definitie van de inschattingsregel.

**Definitie 5.5 (inschattingsregel van de imprecieze leermethode)**

De inschattingsregel van de leermethode gebaseerd op het imprecieze Dirichletmodel is

$$\mu_t^i = M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)}.$$



**Figuur 5.4:** Illustratie van leren met het imprecieze Dirichletmodel.

We nemen  $\Sigma^{-i} = M_{\underline{P}(X|\beta_0, \Sigma^{-i})}$  als initiële inschattingsregel  $\mu_0^i$ .

We kunnen nu twee mogelijke gedragsregels kiezen. De eerste kan als een veralgemening van deze in §5.2.2 gezien worden (zie stelling 4.3).

**Definitie 5.6 (gedragsregel 1 van de imprecieze leer methode)**

De eerste mogelijke gedragsregel van de leer methode gebaseerd op het imprecieze Dirichletmodel is

$$\phi_t^i \in BR^i(M_{\underline{P}}).$$

Als we teruggrijpen naar §4.2.3 zien we dat ook toelaatbare  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$ -maximin-strategieën, die sowieso maximaal zijn, een mogelijke keuze zijn voor een gedragsregel. Door gebruik te maken van stelling 4.4 kunnen we dan de volgende definitie geven.

**Definitie 5.7 (gedragsregel 2 van de imprecieze leer methode)**

De tweede mogelijke gedragsregel van de leer methode gebaseerd op het imprecieze Dirichletmodel is

$$\phi_t^i \in \operatorname{argmax}_{\tau^i \in \Sigma^i} \min_{\sigma^{-i} \in M_{\underline{P}}} u^i(\tau^i, \sigma^{-i}) \subseteq BR^i(M_{\underline{P}}).$$

We weten uit stelling 2.4 dat de  $\underline{P}(X|\beta_t, M_t)$ -maximin-strategieën een deelverzameling vormen van  $BR^i(M_{\underline{P}})$ . Gezien – zoals in §5.2.2 – over het algemeen  $\phi_t^i$  moet gekozen worden uit een verzameling die meer dan één strategie zal bevatten, moet er in de praktijk nog een methode zijn om één strategie uit te kiezen. Dit kan weerom gebeuren met behulp van een toevalsgenerator of op deterministische wijze.

Bovenstaande leer methode wordt schematisch weergegeven in figuur 5.4. Zoals is weergegeven hoeven de opeenvolgende  $M_{\underline{P}}$ 's niet in elkaar te liggen. Bemerkt weerom dat we geen Dirichletverdelingen expliciet nodig hebben in deze leer methode.

### 5.3 Bronvermelding

Voor de notatie hebben we ons grotendeels gebaseerd op [12]. Voor de andere delen van §5.1 werd voornamelijk [2] gebruikt. Voor §5.2 werd haast uitsluitend [6] geraadpleegd.

# Hoofdstuk 6

## Dynamische aspecten van het leren

### 6.1 Inleiding

#### 6.1.1 Dynamische aspecten?

Wat we in dit hoofdstuk zullen onderzoeken zijn enkele dynamische aspecten van de leermethodes die we in hoofdstuk 5 hebben gezien. De *dynamica van een leermethode* is de evolutie van de inschattingsregels  $\mu_t^i$  en de gedragsregels  $\phi_t^i$  van de spelers in functie van de sessie  $t$ . Hierbij wordt de evolutie van  $\phi_t$  bijgehouden in een geschiedenis  $\zeta$ .

De leidraad voor dit hoofdstuk was [12, §1-§5]. In dit artikel worden enkele dynamische aspecten bekeken voor de in hoofdstuk 5 besproken precieze leermethode. Ook worden de resultaten uitgebreid voor een bredere groep leermethodes, die voldoen aan definities uiteengezet in §6.2. Met deze definities worden er in [12] enkele algemene convergentieresultaten aangetoond. We zullen nagaan in hoeverre de imprecieze leermethode binnen dit kader past (om de convergentieresultaten over te nemen) en we breiden dit kader uit waar het nodig blijkt. Deze definities geven reeds een goed beeld van belangrijke dynamische eigenschappen. In §6.3 geven we dan de stellingen die uitspraken doen over de convergentie naar evenwichten.

#### 6.1.2 Beschouwde spelen

In hoofdstuk 2 hebben we reeds beperkingen opgelegd aan het type spelen dat we beschouwen, namelijk enkel tweepersoonsspelen zonder samenwerking. Voor al deze spelen kunnen de leermethodes uit §5.2 door de spelers worden toegepast.

Laten we eerst veronderstellen dat de informatiesituatie er één is van volledige informatie (zie definitie 2.9). Als we naar bovenvermeld type spelen kijken, dan zijn er over het algemeen meerdere evenwichten per spel mogelijk. Voor

**Tabel 6.1:** Een voorbeeld van een spel met meerdere evenwichten die door de spelers gekozen kunnen worden.

s	1	2
1	(5, 6)	(-1, -3)
2	(-7, -2)	(6, 5)

de spelers is het dan niet duidelijk welke strategie hun tegenspeler zal kiezen, zelfs al veronderstellen ze dat hij een evenwicht wil spelen.<sup>1</sup> Bijvoorbeeld in een spel zoals is weergegeven in tabel 6.1, zijn o.a. (1, 1) en (2, 2) evenwichten. Indien speler 1 hoopt (2, 2) te spelen, zal hij strategie 2 kiezen. Analoog hoopt speler 1 op (1, 1) en speelt dus 1. Het onfortuinlijke profiel (2, 1) is het gevolg. Hier zal de leermethode zijn nut dus kunnen bewijzen om voor coördinatie te zorgen. Namelijk indien het de strategiekeuze van beide spelers naar één evenwicht kan leiden.

In een deel van deze tweepersoonsspelen, zoals algemeen geldt voor spelen met tegengestelde belangen, zal er geen coördinatie nodig zijn om een evenwicht te spelen. Dit zal zo zijn als er maar één is of indien de evenwichten een convexe verzameling van strategieprofielen vormen. We zien in dat voor zo'n spel de leermethode niet echt nuttig is. Als echter de spelers niet weten dat ze zo'n spel spelen, dan wordt de leermethode mogelijk weer nuttig. Dit is het geval wanneer de spelers de opbrengsten van hun tegenspeler niet kennen, en de informatiesituatie is er dan één van onvolledige informatie.

### 6.1.3 Verschil in dynamica van het precieze en de imprecieze leermethode: een voorbeeld

We zullen een voorbeeld geven om de dynamica van het gedrag van de spelers te illustreren. Door dit voorbeeld enerzijds uit te werken voor de precieze leermethode (overgenomen uit [12, §5]) en anderzijds voor de imprecieze leermethodes kunnen we alvast enkele verschillen tussen beide opmerken.

Het spel dat bestudeerd wordt is *het gevecht der seksen*.<sup>2</sup> Dit spel wordt weergegeven in tabel 6.2. We nemen voor beide spelers  $\beta_0 = \sqrt{2} + 1$ .

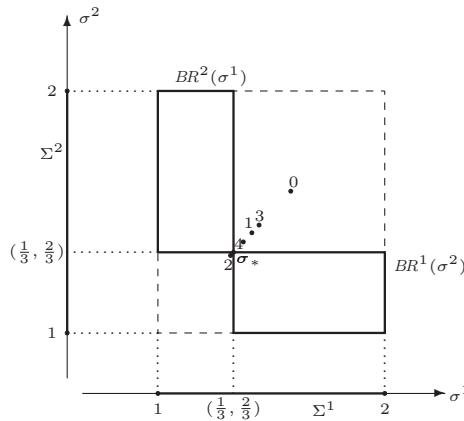
Wanneer we de precieze leermethode gebruiken moeten we eerst een initiële

1. Dit is een veronderstelling die zeer goed past binnen fictief spelen (zie §5.2.1): als de tegenspeler een vaste strategie speelt, is het niet onwaarschijnlijk dat hij er een speelt die tot een evenwicht behoort.

2. Een koppel wil samen een avondje uitgaan. Zij wil naar het theater en hij wil naar de opera. Beiden kunnen ofwel hun wil doordrijven, ofwel toegeven. Wanneer het koppel onbeslist blijft, gaan ze een saaie avond televisiekijken tegemoet.

**Tabel 6.2:** Het gevecht der seksen.

s	1	2
1	(0, 0)	(2, 1)
2	(1, 2)	(0, 0)



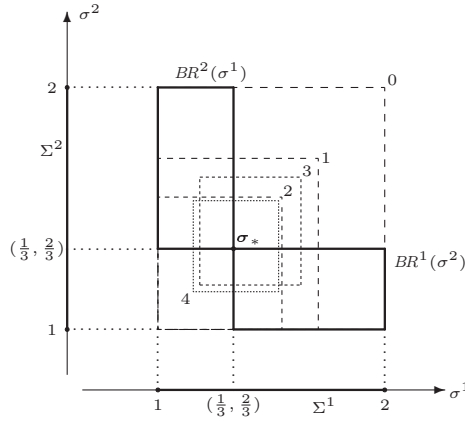
**Figuur 6.1:** Evolutie van het inschattingregelprofiel in het gevecht der seksen voor de precieze leermethode.

inschattingregel kiezen. We nemen

$$\rho_0^{-i} = \frac{1}{\beta_0}(1, \sqrt{2}), \forall i \in M.$$

Als we dan de inschattingregels voor de volgende sessies van het spel berekenen, merken we dat deze nooit zó zijn dat  $BR^i(\rho_t^{-i}) = \Sigma^i$ , er is altijd een uniek beste antwoord (dit is zo wegens het irrationaal karakter van de initiële keuze  $\rho_0^{-i}$ ). De evolutie van de inschattingregels hebben we in figuur 6.1 weergegeven, waarbij bij elke inschattingregel de overeenkomstige  $t$  is geschreven. Bemerkt dat de stapgrootte geleidelijk aan afneemt met toenemende  $t$ , maar niet noodzakelijk bij elke overgang  $t \rightarrow t+1$ . We zien dat de spelers telkenmale een nulopbrengst krijgen en dat hun beider inschattingregels convergeren naar  $\sigma_*^{-i} = (2/3, 1/3)$ . We zien dus dat er ook convergentie van de gedragsregel  $\phi_t^i$  naar het gemengde evenwicht  $\sigma_*$  optreedt, maar dat dit op een nefaste gecorreleerde wijze gebeurt (in de geschiedenis  $\zeta_P$  komen enkel de profielen (1, 1) en (2, 2) voor). Dit voorbeeld spoort ons aan kritisch te blijven. Het illustreert namelijk dat het optreden van convergentie naar een evenwicht niet noodzakelijk overeenkomt met een goede opbrengst voor beide spelers.

We bekijken het spel nu voor de imprecieze leermethode. We veronderstellen dat dezelfde gedragsregels worden gekozen als in het voorgaande. Dit is



**Figuur 6.2:** Evolutie van het inschattingregelprofiel in het gevecht der seksen voor de imprecieze leermethode.

altijd mogelijk aangezien  $\rho_0^{-i} = (1/\beta_0)(1, \sqrt{2}) \in \Sigma^{-i}$ , de initiële inschattingregel in de imprecieze leermethode. De evolutie van de inschattingregels is weergegeven in figuur 6.2. Hier werd een ‘inschattingregelprofiel’ gevisualiseerd als het cartesisch product van de inschattingregels  $M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)}$  van de spelers (in streepjeslijnen). We zien dat het nefaste convergentiegedrag hier geen noodzaak is. Indien de spelers bijvoorbeeld hun gedragsregel kiezen met behulp van een toevalsgenerator, zal de waarschijnlijkheid dat een  $\zeta_P$  optreedt zeker al met elke afgebeelde sessie kleiner worden. Het is namelijk duidelijk dat op basis van de afgebeelde inschattingregels (dus voor  $t = 0, 1, 2, 3, 4$ ) met eindige waarschijnlijkheid ook de niet-nefaste profielen (1, 2) en (2, 1) kunnen worden gespeeld.

## 6.2 Definities

Allereerst herinneren we er kort aan dat in het precieze Dirichletmodel

$$\begin{aligned} \text{inschattingregel: } \mu_t^i &= \rho_t^{-i} = \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t}, \\ \text{gedragsregel: } \phi_t^i &\in BR^i(\rho_t^{-i}). \end{aligned}$$

In het imprecieze Dirichletmodel hebben we

$$\begin{aligned} \text{inschattingregel: } \mu_t^i &= M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)} = \left\{ \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t} \mid \rho_0^{-i} \in \Sigma^{-i} \right\}, \\ \text{gedragsregel 1: } \phi_t^i &\in BR^i(M_{\underline{P}(X|\beta_t, M_t)}), \\ \text{gedragsregel 2: } \phi_t^i &\in \underline{P}(X|\beta_t, M_t)\text{-maximin-strategieën.} \end{aligned}$$



Deze definities zullen we nodig hebben om na te gaan welke van de hieronder gedefinieerde eigenschappen  $\mu_t^i$  en  $\phi_t^i$  bezitten. We zullen verder  $\underline{P}(X | \beta_t, M_t)$  afkorten tot  $\underline{P}_t$ .

### 6.2.1 Compatibele geschiedenissen

We kunnen als volgt een belangrijke verzameling van geschiedenissen karakteriseren.

#### **Definitie 6.1 (compatibele geschiedenissen)**

Een geschiedenis  $\zeta = (s_1, s_2, \dots)$  wordt compatibel genoemd met een profiel van gedragsregels  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$  indien voor alle  $t$  en voor alle  $i \in M$  er geldt dat

$$\phi_t^i(\zeta_t)(s_t^i) > 0.$$

Het komt er dus op neer dat compatibele geschiedenissen deze zijn die met een positieve waarschijnlijkheid kunnen optreden als de spelers  $\phi$  gebruiken.

### 6.2.2 Kortzichtige gedragsregels

Het is interessant te weten in welke mate de gebruikte gedragsregel er effectief in slaagt de te verwachten opbrengst te maximaliseren. Om dit te karakteriseren voeren we de onderstaande definities in. Beschouw hiervoor een inschattingsregel  $\mu^i = (\mu_1^i, \mu_2^i, \dots)$ . Deze definities werden overgenomen uit [12, §4] en slaan op situaties waarbij  $\mu_t^i$  een unieke strategie is. De volgende definities variëren van meer naar minder beperkend.

#### **Definitie 6.2 (kortzichtige gedragsregel)**

De gedragsregel  $\phi^i = (\phi_1^i, \phi_2^i, \dots)$  van  $i$  wordt kortzichtig genoemd ten opzichte van  $\mu^i$  indien – voor alle  $t$  en  $\zeta_t$  –  $\phi_t^i(\zeta_t)$  de onmiddellijk te verwachten opbrengst maximaliseert, gegeven  $\mu_t^i(\zeta_t)$ . Namelijk dat

$$u^i(\phi_t^i, \mu_t^i) = \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \mu_t^i).$$

#### **Definitie 6.3 (sterk asymptotisch kortzichtige gedragsregel)**

$\phi^i$  is sterk asymptotisch kortzichtig ten opzichte van  $\mu^i$  indien – voor een reeks van  $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^+$  met  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$  en voor alle  $t$  en  $\zeta_t$  – elke  $\tilde{s}^i \in S^i$  waarvoor  $\phi_t^i(\zeta_t)(\tilde{s}^i) > 0$  de onmiddellijk te verwachten opbrengst op  $\varepsilon_t$  na maximaliseert, gegeven  $\mu_t^i(\zeta_t)$ . Namelijk dat

$$u^i(\tilde{s}^i, \mu_t^i) + \varepsilon_t \geq \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \mu_t^i).$$

**Definitie 6.4 (asymptotische kortzichtige gedragsregel)**

$\phi^i$  is asymptotisch kortzichtig ten opzichte van  $\mu^i$  indien – voor een reeks van  $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^+$  met  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$  en voor alle  $t$  en  $\zeta_t - \phi_t^i(\zeta_t)$  de onmiddellijk te verwachten opbrengst op  $\varepsilon_t$  na maximaliseert, gegeven  $\mu_t^i(\zeta_t)$ . Namelijk dat

$$u^i(\phi_t^i, \mu_t^i) + \varepsilon_t \geq \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \mu_t^i).$$

Uit voorgaande definities valt op te maken dat asymptotische kortzichtigheid volgt uit sterk asymptotische kortzichtigheid en ook dat sterk asymptotische kortzichtigheid volgt uit kortzichtigheid.

We bekijken eerst het precieze geval. De gebruikte gedragsregel  $BR^i(\rho_t^{-i})$  blijkt kortzichtig te zijn ten opzichte van de inschattingregel  $\rho_t^{-i}$ . Hiervoor moeten we volgende voorwaarde controleren (zie definitie 6.2), namelijk dat

$$u^i(\tau^i, \rho_t^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \rho_t^{-i}), \forall \tau^i \in BR^i(\rho_t^{-i}).$$

Uit definitie 2.10 volgt onmiddellijk dat aan deze voorwaarde voldaan is.

Voor het imprecieze geval staan de zaken er niet zo eenvoudig voor. Een eerste vraag die we ons moeten stellen is of de gegeven definities wel nog toepasbaar zijn. Gezien de inschattingregel  $\mu_t^i$  niet meer een unieke strategie oplevert, maar een convexe verzameling van strategieën  $M_{P_t}$ , die gelijkvormig is met  $\Sigma^{-i}$ , zullen we eisen dat de definitie opgaat voor elke  $\sigma^{-i} \in M_{P_t}$ .<sup>3</sup> Verder maken we geen veronderstellingen over de selectiemethode van een  $\sigma^i$  uit  $BR^i(M_{P_t})$  of uit de  $P_t$ -maximin-strategieën. Uit deze veronderstelling en de voorgaande eis volgt er dat er niet noodzakelijk een verband is tussen de gedragsregel  $\phi_t^i$  en een element uit de inschattingregel  $M_{P_t}$ . We kunnen dan definitie 6.4 als volgt herformuleren.<sup>4</sup>

**Definitie 6.5 (asymptotische kortzichtige gedragsregel bis)**

$\phi^i$  is asymptotisch kortzichtig ten opzichte van  $\mu^i$  indien – voor een reeks van  $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^+$  met  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$  en voor alle  $t$  en  $\zeta_t - \phi_t^i(\zeta_t)$  de onmiddellijk te verwachten opbrengst op  $\varepsilon_t$  na maximaliseert, gegeven  $\mu_t^i(\zeta_t)$ . Namelijk dat

$$\forall \sigma^{-i} \in \mu_t^i : u^i(\phi_t^i, \sigma^{-i}) + \varepsilon_t \geq \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma^{-i}).$$

We zullen nu aantonen dat de gedragsregels voor de imprecieze leer methode niet noodzakelijk asymptotisch kortzichtig zijn ten opzichte van  $M_{P_t}$  (en dus ook niet noodzakelijk sterk asymptotisch kortzichtig of kortzichtig). Beschouw eerst de gedragsregel  $\phi_t^i \in BR^i(M_{P_t})$ . We moeten dan nagaan dat niet

3. We geven kort andere werkwijzen in §A.2.

4. De herformulering van definities 6.2 en 6.4 verloopt volledig analoog.

noodzakelijk voor elk spel een naar nul convergerende rij getallen  $\varepsilon_t$  bestaat waarvoor voor alle  $t$  geldt dat

$$\forall \sigma^{-i} \in M_{\underline{P}_t}, \forall \sigma^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t}) : u^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) + \varepsilon_t \geq \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma^{-i}). \quad (6.1)$$

We zullen dit doen met behulp van een tegenvoorbeeld. We construeren hiervoor eerst de rij van kleinst mogelijke  $\varepsilon_t$ 's die aan (6.1) voldoet. Deze is

$$\begin{aligned} \check{\varepsilon}_t &= \max_{\sigma^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})} \max_{\rho_t^{-i} \in M_{\underline{P}_t}} \max_{s^i \in S^i} (u^i(s^i, \rho_t^{-i}) - u^i(\sigma^i, \rho_t^{-i})) \\ &= \max_{\sigma^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})} \max_{\rho_0^{-i} \in \Sigma^{-i}} \max_{s^i \in S^i} \left( \frac{\beta_0}{\beta_0 + t} (u^i(s^i, \rho_0^{-i}) - u^i(\sigma^i, \rho_0^{-i})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{\beta_0 + t} \left( u^i(s^i, \frac{\kappa_t}{t}) - u^i(\sigma^i, \frac{\kappa_t}{t}) \right) \right). \end{aligned}$$

We bekijken nu de eerste term van het rechterlid. Deze zal voor  $t \rightarrow \infty$  convergeren naar 0. Het aldaar optredende verschil is namelijk begrensd door het grootst optredende verschil in opbrengst in het spel en de coëfficiënt  $\beta_0/(\beta_0+t)$  convergeert naar 0. Dus  $\check{\varepsilon}_t$  zal enkel naar nul convergeren als de tweede term in het rechterlid naar nul convergeert. Gezien de coëfficiënt  $t/(\beta_0+t)$  naar één convergeert moeten we het gedrag van de volgende uitdrukking onderzoeken

$$\max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \frac{\kappa_t}{t}) - \min_{\tilde{s}^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})} u^i(\tilde{s}^i, \frac{\kappa_t}{t}), \quad (6.2)$$

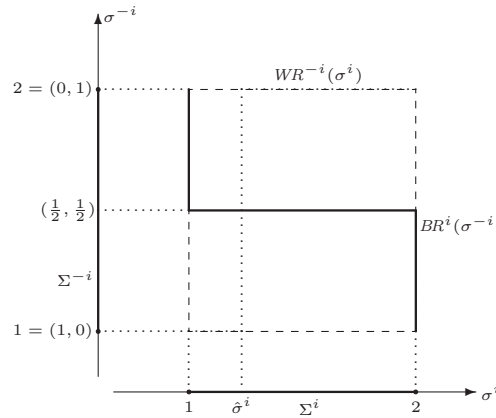
waarbij we wegens stelling 2.1  $\sigma^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})$  mochten vervangen door  $\tilde{s}^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})$ . We zullen nu een voorbeeld geven van een spel waarvoor (6.2) als functie van  $t$  naar onder begrensd is door een strikt positief getal en  $\varepsilon_t$  dus niet zal convergeren naar nul. Bemerkt alvast dat de  $s^i$  die de eerste term van (6.2) maximaliseert per definitie een element van  $BR^i(\kappa_t/t)$  is. Beschouw nu het spel voorgesteld in figuur 6.3. Veronderstel dat er reeds een oneven aantal sessies  $t = 2t' + 1$  werden gespeeld. De geschiedenis  $\zeta_t$  is zodanig gekozen dat<sup>5</sup>

$$\frac{\kappa_t}{t} = \left( \frac{t' + 1}{2t' + 1}, \frac{t'}{2t' + 1} \right). \quad (6.3)$$

Voor elke  $t'$  (hoe groot ook) zal dit van de vorm  $(1/2 + \delta, 1/2 - \delta)$  zijn, met  $\delta \in (0, 1/2]$ . Het beste antwoord  $s^i$  hierop zal dus strategie 2 zijn. Als we nu kunnen aantonen dat  $(1/2, 1/2)$  in  $M_{\underline{P}_t}$  ligt, dan zal het volgens onze leer methode toegelaten zijn om strategie 1 te spelen gezien dan  $BR^i(M_{\underline{P}_t}) = \Sigma^i$ . Dit blijkt inderdaad het geval te zijn, namelijk (via de geparametriseerde vorm van  $M_{\underline{P}_t}$ )

$$\exists \lambda \in [0, 1] : \frac{\beta_0}{\beta_0 + t} (1 - \lambda, \lambda) + \frac{t}{\beta_0 + t} \frac{\kappa_t}{t} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (6.4)$$

5. In definitie 6.5 wordt elke willekeurige  $\zeta_t$  beschouwd, dus wij kunnen er een kiezen die een gewenste  $\kappa_t$  genereert.



**Figuur 6.3:** Illustratie voor het tegenvoorbeeld van asymptotische kortzichtigheid bij de imprecieze leer methode.

Samen met (6.3) volgt er dat voor  $\lambda = 1/2 + 1/(2\beta_0)$  de gelijkheid in (6.4) geldt. Hierdoor is het gestelde bewezen voor  $\beta_0 \geq 1$ . De laatste stap die ons rest is aan te tonen dat er spelen bestaan waarvoor het gestelde opgaat voor willekeurig kleine  $\beta_0$ . Beschouw hiervoor een spel analoog aan het spel dat is gegeven in figuur 6.3, maar waarbij nu het beste antwoord  $\Sigma^i$  is voor  $\sigma^{-i} = (1 - 1/n, 1/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ . Veronderstel nu dat er reeds een  $n$ -voud  $+ 1$  aantal sessies  $t = nt' + 1$  werden gespeeld. De geschiedenis  $\zeta_t$  is nu zodanig dat

$$\frac{\kappa_t}{t} = \left( \frac{(n-1)t' + 1}{nt' + 1}, \frac{t'}{nt' + 1} \right),$$

waaruit analoog volgt dat  $\lambda = 1/n + 1/(n\beta_0)$ . Dan is het gestelde bewezen voor  $\beta_0 \geq 1/(n-1)$ . Doordat we  $n \in \mathbb{N}^+$  willekeurig groot kunnen maken zijn er willekeurig grote  $t$  te vinden waarvoor strategie 1 gespeeld kan worden, zodat (6.2) naar onder begrensd is, namelijk

$$u^i(2, \frac{\kappa_t}{t}) - u^i(1, \frac{\kappa_t}{t}) = \delta \in \mathbb{R}^+.$$

We hebben dus bewezen dat de gedragsregel  $\phi_t^i \in BR^i(M_{\underline{P}_t})$  niet noodzakelijk asymptotisch kortzichtig is ten opzichte van  $M_{\underline{P}_t}$ . Dit geldt ook voor de gedragsregel  $\phi_t^i \in \underline{P}_t$ -maximin-strategieën. Hierboven hebben we namelijk aangetoond dat voor willekeurig grote  $t$ ,  $\Sigma^i$  een beste antwoord is. Indien nu  $\Sigma^i$  een beste antwoord is zal de  $(\Sigma^{-i})$ -maximin-strategie  $\hat{\sigma}^i$  gespeeld worden. Aangezien dit een gemengde strategie kan zijn (zie b.v. figuur 6.3), kan weerom die strategie gespeeld worden waarvoor (6.2) verschilt van nul.

Ondanks het feit dat de onmiddellijk te verwachten opbrengst zelfs niet benaderend wordt gemaximaliseerd door de gedragsregels van de imprecieze

leermethode, wordt dit wel beoogd. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.<sup>6</sup>

**Definitie 6.6 (beoogd kortzichtige gedragsregel)**

De gedragsregel  $\phi^i = (\phi_1^i, \phi_2^i, \dots)$  van  $i$  wordt beoogd kortzichtig genoemd ten opzichte van  $\mu^i$  indien – voor alle  $t$  en  $\zeta_t$  –  $\phi_t^i(\zeta_t)$  de onmiddellijk te verwachten opbrengst beoogd te maximaliseren, gegeven  $\mu_t^i(\zeta_t)$ . Namelijk dat

$$\exists \sigma^{-i} \in \mu_t^i : u^i(\phi_t^i, \sigma^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma^{-i}).$$

De gedragsregels van de imprecieze leermethode zijn dus beoogd kortzichtig ten opzichte van de inschattingsregel van de imprecieze leermethode.

### 6.2.3 Adaptieve inschattingsregels

We karakteriseren inschattingsregels aan de hand van de mate waarin ze beïnvloed worden door bepaalde delen van een geschiedenis. Een eerste categorie wordt bepaald door de volgende definitie.

**Definitie 6.7 (adaptieve inschattingsregel)**

We noemen een inschattingsregel  $\mu^i$  adaptief indien voor alle  $\varepsilon \in (0, 1]$  en voor alle  $t$  er een  $T(\varepsilon, t)$  bestaat waarvoor er voor alle  $\zeta_t$  en  $t' > T(\varepsilon, t)$  geldt dat  $\mu_{t'}^i(\zeta_{t'})$  een waarschijnlijkheid van hoogstens  $\varepsilon$  plaatst op de zuivere strategieën die niet werden gespeeld in de sessies  $t + 1$  tot  $t'$  (volgens  $\zeta_{t'}$ ).

Een triviaal voorbeeld van adaptieve inschattingsregels vinden we terug bij Cournot-aanpassing in §5.1.3. Daar werd enkel rekening gehouden met de laatst gespeelde strategie.

Voor leren met het Dirichletmodel bekijken we weerom eerst het precieze geval. De inschattingsregel  $\rho_t^{-i}$  is adaptief. Om dit aan te tonen beschouwen we een  $s^{-i} \in S^{-i}$  waarvoor geldt dat  $\kappa_t(s^{-i}) > 0$ . Volgens definitie 6.7 moeten we nagaan dat

$$\forall \varepsilon \in (0, 1], \forall t, \exists T(\varepsilon, t) : \forall \zeta_t, \forall t' > T : \rho_{t'}^{-i}(s^{-i}) \leq \varepsilon,$$

indien  $\kappa_{t'}(s^{-i}) = \kappa_t(s^{-i})$ . We stellen voorop dat

$$T(\varepsilon, t) = \frac{\beta_0 + t}{\varepsilon} - \beta_0. \quad (6.5)$$

We zien dat wegens  $\varepsilon \in (0, 1]$  deze  $T \geq t$  is. We weten verder dat

$$\begin{aligned} \rho_{t'}^{-i} &= \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_{t'}}{\beta_0 + t'} \\ &= \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t + (\kappa_{t'} - \kappa_t)}{\beta_0 + t'}. \end{aligned}$$

6. Analoog kunnen we ook definities voor beoogd (sterk) asymptotische kortzichtige gedragsregels formuleren.

Voor een strategie  $s^{-i}$  die niet werd gespeeld in de sessies  $t + 1$  tot  $t'$  wordt dit

$$\rho_{t'}^{-i}(s^{-i}) = \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}(s^{-i}) + \kappa_t(s^{-i}) + 0}{\beta_0 + t'}.$$

Om een bovengrens af te schatten voor het linkerlid, houden we rekening met (6.5) (in het rechterlid  $t'$  vervangen door de strikt kleinere  $T$ ) en krijgen we

$$\rho_{t'}^{-i}(s^{-i}) < \frac{\beta_0 \rho_0^{-i}(s^{-i}) + \kappa_t(s^{-i})}{\beta_0 + t} \varepsilon.$$

Gezien  $\rho_0^{-i}(s^{-i}) \leq 1$  en  $\kappa_t(s^{-i}) \leq t$ , vinden we hieruit dat  $\rho_{t'}^{-i}(s^{-i}) < \varepsilon$ , voor alle strategieën  $s^{-i}$  die niet werden gespeeld in de sessies  $t + 1$  tot  $t'$ . Voor de in (6.5) vooropgestelde  $T$  is de voorwaarde dus voldaan en adaptiviteit van de inschattingregel is dan bewezen.

Het imprecieze geval is nu eenvoudig aan te pakken. We moeten gewoon nagaan of

$$\forall \varepsilon \in (0, 1], \forall t, \exists T(\varepsilon, t) : \forall \zeta_t, \forall t' > T, \forall \sigma^{-i} \in M_{P_{t'}} : \sigma^{-i}(s^{-i}) \leq \varepsilon.$$

indien  $\kappa_{t'}(s^{-i}) - \kappa_t(s^{-i}) = 0$ . Uit de constructie van  $M_{P_{t'}}$  (zie §4.3.3) volgt echter dat zo'n  $\sigma^{-i}$  niets anders is dan een  $\rho_{t'}^{-i}$  overeenkomend met een  $\rho_0^{-i}$  die vrij te kiezen is, zoals werd uitgelegd in §5.2.2.  $M_{P_t}$  is dan adaptief, gezien  $\rho_t^{-i}$  adaptief is in het precieze geval en gezien  $T(\varepsilon, t)$  volgens (6.5) onafhankelijk is van  $\rho_0^{-i}$  (en dus van  $\sigma^{-i}$ ).

#### 6.2.4 Asymptotisch empirische inschattingregels

Een deelcategorie van de adaptieve inschattingregels kunnen we definiëren aan de hand van de frequentievector  $\kappa_t/t$  van door de tegenspeler gespeelde strategieën. We noemen dit de *empirische strategie*.

##### **Definitie 6.8 (asymptotisch empirische inschattingregel)**

Een inschattingregel  $\mu^i$  wordt asymptotisch empirisch genoemd indien voor alle  $\zeta \in \mathcal{Z}$  geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \mu_t^i(\zeta_t) - \frac{\kappa_t(\zeta_t)}{t} \right\| = 0, \quad (6.6)$$

waarbij  $\zeta_t$  deelgeschiedenissen van de gekozen  $\zeta$  zijn.

Het is duidelijk dat de inschattingregel van Cournot-aanpassing hier niet aan voldoet.

De inschattingsregel voor het precieze geval  $-\rho_t^{-i}$  is asymptotisch empirisch. We tonen dit als volgt aan.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \rho_t^{-i} - \frac{\kappa_t}{t} \right\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{\beta_0 \rho_0^{-i} + \kappa_t}{\beta_0 + t} - \frac{\kappa_t}{t} \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{\beta_0}{\beta_0 + t} \rho_0^{-i} + \left( \frac{1}{\beta_0 + t} - \frac{1}{t} \right) \kappa_t \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta_0}{\beta_0 + t} \left\| \rho_0^{-i} - \frac{\kappa_t}{t} \right\|. \end{aligned}$$

Daar nu  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 / (\beta_0 + t) = 0$  en  $\|\rho_0^{-i} - \kappa_t/t\|$  begrensd blijft gezien  $\Sigma^{-i}$  compact is, is de voorwaarde voldaan en vinden we dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \rho_t^{-i} - \frac{\kappa_t}{t} \right\| = 0.$$

Volledig analoog aan de redenering in §6.2.3 is voor het imprecieze geval  $M_{P_t}$  asymptotisch empirisch omwille van het asymptotisch empirisch zijn van alle  $\rho_t^{-i}$ . We hebben hiervoor een definitie van afstand tussen  $M_{P_t}$  en  $\kappa_t/t$  nodig. We nemen

$$d\left(M_{P_t}, \frac{\kappa_t}{t}\right) = \max_{\sigma^{-i} \in M_{P_t}} \left\| \sigma^{-i} - \frac{\kappa_t}{t} \right\|,$$

waardoor we definitie 6.8 kunnen blijven gebruiken indien voorwaarde (6.6) vervangen wordt door

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{\sigma^{-i} \in M_{P_t}} \left\| \sigma^{-i} - \frac{\kappa_t(\zeta_t)}{t} \right\| = 0.$$

## 6.3 Stellingen

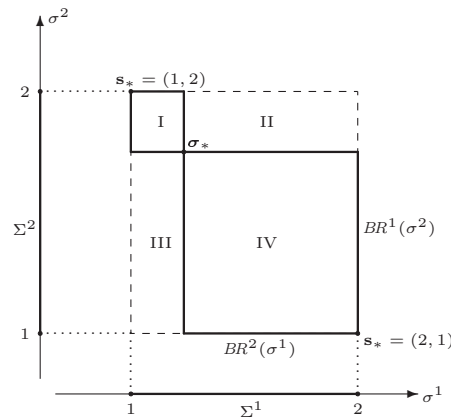
### 6.3.1 Absorptie naar een strikt evenwicht

Voor het precieze Dirichletmodel wordt in [2, §2.3 proposition 2.1] bewezen dat de volgende stelling geldt.

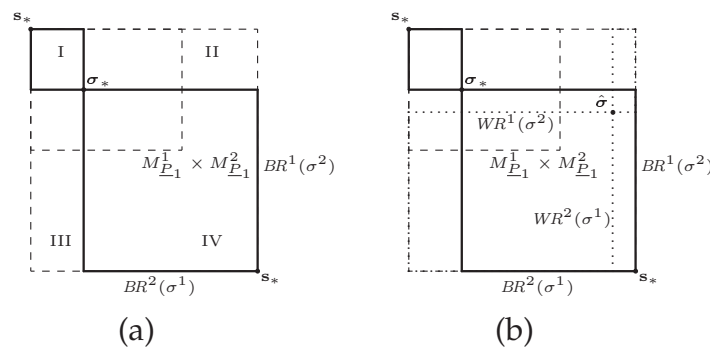
**Stelling 6.1 (absorptie naar een strikt evenwicht)**

*Indien in een met  $\phi$  compatibele geschiedenis  $\zeta$  tijdens sessie  $t$  een zuiver strategieprofiel  $s_*$  wordt gespeeld dat een strikt evenwicht is, zal  $s_*$  op elke  $t' > t$  gespeeld worden.*

Een eenvoudige illustratie kan de betekenis van deze stelling duidelijk maken. Beschouw hiervoor figuur 6.4, behorend bij een hypothetisch spel waarin, zoals uit de figuur blijkt, de belangen van de spelers zeker niet tegengesteld zijn (het spel van tabel 6.1 zouden we gelijkaardig kunnen voorstellen). Schrijf



**Figuur 6.4:** Illustratie van absorptie door een strikt evenwicht bij leren met de precieze leermethode ( $N^1 = 2 = N^2$ ).



**Figuur 6.5:** Voorbeeld van niet-absorptie door een strikt evenwicht bij leren met de imprecieze leermethode ( $N^1 = 2 = N^2$ ).

$\rho_t = (\rho_t^1, \rho_t^2)$  voor het profiel van inschattingen van beide spelers. Volgens de leermethode zullen volgende strategieprofielen gespeeld worden:  $(1, 2)$  in gebied I,  $(1, 1)$  in II,  $(2, 1)$  in III en  $(2, 1)$  in IV. Op de randen van deze gebieden is er keuze van twee of meer ( $\sigma_*$ ) profielen mogelijk. De inschatting  $\rho_{t+1}$  zal dus ook in de richting van het gespeelde profiel opschuiven. We zien dus dat, indien de inschattingen in I of IV belanden, convergentie naar een  $s_*$  onvermijdelijk wordt.

We kunnen ons afvragen of deze interessante eigenschap ook opgaat voor leren met het imprecieze Dirichletmodel. Dat dit niet zo is, tonen we aan door het geven van tegenvoorbeelden – weergegeven in figuur 6.5 – aan de hand van hetzelfde spel als werd weergegeven in figuur 6.4.



In figuur 6.5 (a) bekijken we gedragsregel  $\phi_t^i \in BR^i(M_{P_t})$ . Veronderstel dat reeds in de eerste sessie  $s_* = (1, 2)$  gespeeld wordt. We hebben het hieruit volgende cartesisch product van de inschattingen van de spelers aangeduid met  $M_{P_1}^1 \times M_{P_1}^2$ .<sup>7</sup> Bemerkt dat het strategieprofiel dat de spelers zullen kiezen niet noodzakelijk in  $M_{P_t}^1 \times M_{P_t}^2$  hoeft te liggen, daar de inschattingen niet noodzakelijk correct zijn. We zien dat  $BR^i(M_{P_t}^{-i}) = \Sigma^i, i = 1, 2$ . De tweede inschatting is dus niet noodzakelijk  $s_* = (1, 2)$ , waaruit volgt dat stelling 6.1 voor deze methode niet geldt.

In figuur 6.5 (b) bekijken we gedragsregel  $\phi_t^i \in P_t$ -maximin-strategieën. In de eerste beurt zal elke speler zijn maximin-strategie spelen, wat  $\hat{\sigma}$  als verkozen strategieprofiel oplevert.<sup>8</sup> Daar dit een gemengd strategieprofiel is kan er dus weerom  $s_* = (1, 2)$  gespeeld worden, met dezelfde gevolgen voor de inschattingen als in de vorige paragraaf. In de tweede sessie zal nog altijd de gemengde  $\hat{\sigma}$  verkozen worden, met als gevolg dat elk profiel mogelijk is. Ook voor deze methode geldt stelling 6.1 dus niet.

We zien dus dat omwille van de imprecisie in de inschattingen een strikt evenwicht niet absorberend hoeft te zijn na eenmalig gespeeld te zijn. Absorptie zal echter wel plaatsvinden wanneer  $M_{P_t}^1 \times M_{P_t}^2$  volledig in I of IV belandt. Dit inzicht geeft aanleiding tot volgende stelling.

**Stelling 6.2 (voorwaardelijke absorptie naar een strikt evenwicht)**

*Indien in een met  $\phi$  compatibele geschiedenis  $\zeta$  tijdens sessie  $t$  een zuiver strategieprofiel  $s_*$  moet worden gespeeld dat een strikt evenwicht is, zal  $s_*$  op elke  $t' > t$  gespeeld worden.*

Bemerkt dat in tegenstelling tot stelling 6.1 er nu als extra voorwaarde wordt geëist dat de spelers geen andere keuze hebben dan op basis van hun inschatting  $\mu_{t-1}^i$  en volgens hun gedragsregel  $\phi_{t-1}^i$  het strikte evenwicht  $s_*$  te spelen. Voor het precieze geval zal deze stelling sowieso gelden, gezien daarvoor ook stelling 6.1 geldt. Voor het imprecieze geval zullen we ze bewijzen voor de gedragsregel  $\phi_t^i \in BR^i(M_{P_t})$ . Ze geldt dan ook onmiddellijk voor  $\phi_t^i \in P_t$ -maximin-strategieën, daar deze een deelverzameling vormen van de eerste gedragsregel (zie stelling 2.4).

**Bewijs van stelling 6.2** De extra voorwaarde impliceert dat

$$\forall i \in M, \exists! s_*^i \in S^i : \forall \rho_{t-1}^{-i} \in M_{P_{t-1}} : u^i(s_*^i, \rho_{t-1}^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \rho_{t-1}^{-i}). \quad (6.7)$$

We kunnen dus voor alle  $i \in M$  elke  $\rho_t^{-i} \in M_{P_t}$  schrijven als

$$\rho_t^{-i} = \frac{t-1}{t} \rho_{t-1}^{-i} + \frac{1}{t} s_*^{-i}.$$

7. Gezien we nergens hebben geëist dat de hyperparameter van verschillende spelers gelijk is hoeft  $M_{P_t}^1 \times M_{P_t}^2$  niet gelijkvormig te zijn met  $\Sigma^1 \times \Sigma^2$ . Hier namen we voor speler 1  $\beta_0 = 1$  en voor speler 2  $\beta_0 = 2$ .

8. §2.3.6 en figuur 2.8(b) kunnen nog meer verduidelijken waarom dit zo is.

De spelers zullen nu een beste antwoord hierop spelen, namelijk een strategie  $\sigma^i \in \Sigma^i$  waarvoor

$$u^i(\sigma^i, \rho_t^{-i}) = \max_{\tau^i \in \Sigma^i} u^i(\tau^i, \rho_t^{-i}).$$

Wegens de bilineariteit van  $u^i(\sigma^i, \rho_t^{-i})$  kunnen we het linkerlid herschrijven als

$$\frac{t-1}{t} u^i(\sigma^i, \rho_{t-1}^{-i}) + \frac{1}{t} u^i(\sigma^i, s_*^{-i}). \quad (6.8)$$

Volgens de voorwaarde (6.7) is  $s_*^i$  het unieke beste antwoord op al de strategieën  $\rho_{t-1}^{-i} \in M_{P_{t-1}}$  en  $s_*^i$  is per definitie het unieke beste antwoord op  $s_*^{-i}$ . Daardoor volgt voor beide spelers uit (6.8) dat  $s_*^i$  het unieke beste antwoord is op elke  $\rho_t^{-i}$  in  $M_{P_t}$ . Dit betekent dat  $s_*$  ook in sessie  $t$  gespeeld zal worden en door inductie op  $t$  dus ook in alle volgende sessies.  $\square$

We hebben in het voorgaande de situatie bestudeerd waarbij beide spelers dezelfde leermethode gebruiken. We kunnen echter ook de situatie beschouwen waarbij één speler de precieze leermethode gebruikt en de andere speler de imprecieze leermethode. Ook in dit geval zal stelling 6.2 opgaan. Ook de hieronder besproken stellingen 6.4 en 6.7 kunnen onmiddellijk veralgemeend worden voor deze situatie.

### 6.3.2 Herhaald spelen van een zuiver strategieprofiel

Voor sterk asymptotische gedragsregels wordt in [12, proposition 4.1] de volgende interessante stelling bewezen.

#### **Stelling 6.3**

*We beschouwen een  $\zeta \in \mathcal{Z}$  waarvoor voor een bepaalde  $s_* \in \mathbf{S}$  en  $t$  geldt dat  $s_{t'} = s_*$ ,  $\forall t' \geq t$ . Indien  $\zeta$  compatibel is met gedragsregels  $\phi^i$  die sterk asymptotisch kortzichtig zijn ten opzichte van adaptieve inschattingregels  $\mu^i$ , dan is  $s_*$  een evenwicht.*

Deze stelling gaat dus op voor de precieze leermethode, maar ook voor de imprecieze leermethode kunnen we een gelijkaardig resultaat bekomen. Dit moet echter op een andere manier bewezen worden, aangezien we ons niet kunnen beroepen op sterk asymptotische kortzichtigheid van  $\phi^i$ .

#### **Stelling 6.4**

*We beschouwen een  $\zeta \in \mathcal{Z}$  waarvoor voor een bepaalde  $s_* \in \mathbf{S}$  en  $t$  geldt dat  $s_{t'} = s_*$ ,  $\forall t' \geq t$ . Indien de inschattingregel  $\mu^i$  en een gedragsregel  $\phi^i$  van de imprecieze leermethode worden gebruikt en indien  $\zeta$  compatibel is met  $\phi^i$ , dan is  $s_*$  een evenwicht.*

We zien dat stelling 6.3 enkel verschilt van deze stelling wat betreft de eisen voor de gedragsregel, gezien de inschattingsregel van de imprecieze leer methode adaptief is. Alvorens deze stelling te bewijzen, geven we eerst een handig lemma.

**Lemma 6.5**

Beschouw een functie

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = \sum_{y \in Y} \lambda_y f_y(x), x \in X,$$

met

$$\lambda_y \in \mathbb{R} : \sum_{y \in Y} \lambda_y = 1,$$

waarbij  $X$  en  $Y$  eindige verzamelingen zijn en waarbij voor elke  $y \in Y$ ,  $f_y$  een reëelwaardige functie op  $X$  is. Dan geldt voor alle  $z \in Z$  en  $x_* \in X$  dat

$$x_* \notin \operatorname{argmax}_{x \in X} f_z(x) \Rightarrow \exists \lambda_z^0 \in [0, 1) : \forall \lambda_z \geq \lambda_z^0 : x_* \notin \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x).$$

**Bewijs van lemma 6.5** Beschouw een  $z \in Y$ , een  $x_z \in \operatorname{argmax}_{x \in X} f_z(x)$  en een  $x_* \notin \operatorname{argmax}_{x \in X} f_z(x)$ . Er geldt dan duidelijk dat

$$x_* \neq x_z \text{ en } f_z(x_z) > f_z(x_*). \quad (6.9)$$

Er geldt ook voor alle  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_z f_z(x) + (1 - \lambda_z) \frac{\sum_{y \in Y, y \neq z} \lambda_y f_y(x)}{1 - \lambda_z} \\ &= \lambda_z f_z(x) + (1 - \lambda_z) g_z(x). \end{aligned}$$

We zoeken nu een  $\lambda_z$  waarvoor  $f(x_z) > f(x_*)$ . Wanneer  $g_z(x_*) < g_z(x_z)$  voldoen wegens (6.9) triviaal alle  $\lambda_z \in [0, 1]$ . Wanneer  $g_z(x_*) \geq g_z(x_z)$  hebben we dat

$$\begin{aligned} f(x_z) &> f(x_*) \\ \Leftrightarrow \lambda_z f_z(x_z) + (1 - \lambda_z) g_z(x_z) &> \lambda_z f_z(x_*) + (1 - \lambda_z) g_z(x_*) \\ \Leftrightarrow \lambda_z &> \frac{g_z(x_*) - g_z(x_z)}{[f_z(x_z) - f_z(x_*)] + [g_z(x_*) - g_z(x_z)]} = \frac{r}{s + r} = \lambda_z^0. \end{aligned}$$

Hierbij is  $r \geq 0$  en is  $s > 0$  wegens (6.9), waardoor we vinden dat de gezochte  $\lambda_z^0 \in (r/(s+r), 1) \subseteq [0, 1)$  is.  $\square$

**Bewijs van stelling 6.4** Gezien de inschattingsregel  $\mu^i$  adaptief is geldt er dat

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in (0, 1], \forall t, \exists T(\varepsilon, t) : \forall \zeta_t, \forall t' > T, \forall s^i \in S^i : \\ \kappa_{t'}(s^{-i}) = \kappa_t(s^{-i}) \Rightarrow \forall \sigma^{-i} \in M_{P_t} : \sigma^{-i}(s^{-i}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Gezien hier  $s_{t'} = s_*$ ,  $\forall t' \geq t$  geldt  $\kappa_{t'}(s^{-i}) = \kappa_t(s^{-i})$  dus voor  $s^{-i} \in S^{-i} \setminus \{s_*^{-i}\}$  en voor alle spelers ( $\forall i \in M$ ). We kunnen dus voor alle  $\sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}$  schrijven dat

$$\sigma^{-i} = \overbrace{\sigma^{-i}(s_*^{-i})}^{\geq 1 - (N^{-i} - 1)\varepsilon} s_*^{-i} + \sum_{\substack{s^{-i} \in S^{-i} \\ s^{-i} \neq s_*^{-i}}} \overbrace{\sigma^{-i}(s^{-i})}^{\leq \varepsilon} s^{-i}$$

en dus voor alle  $\sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}$  en  $s^i \in S^i$  dat

$$u^i(s^i, \sigma^{-i}) = \sigma^{-i}(s_*^{-i})u^i(s^i, s_*^{-i}) + \sum_{\substack{s^{-i} \in S^{-i} \\ s^{-i} \neq s_*^{-i}}} \sigma^{-i}(s^{-i})u^i(s^i, s^{-i}).$$

Veronderstellen we nu dat  $s_*$  geen evenwicht is, dan zal er minstens voor één speler  $i$  gelden dat

$$s_*^i \notin BR^i(s_*^{-i}) = \operatorname{argmax}_{s^i \in S^i} u^i(s^i, s_*^{-i}).$$

We zullen nu bewijzen dat er een  $\varepsilon \in (0, 1]$  bestaat (en dus een  $t'$  bestaat), waarvoor  $s_*^i \notin BR^i(\sigma^{-i}), \forall \sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}$ . Dit betekent dat we zullen bewijzen dat op sessie  $t'$  zeker niet  $s_*^i$  gespeeld kan worden. We weten dat de verzameling  $\{BR^i(\sigma^{-i}) \mid \sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}\}$  eindig is wegens de eindigheid van het aantal beste antwoorden (zie §2.3.1). Dit betekent dat er een eindige verzameling  $N_{P_{t'}} \subseteq M_{P_{t'}}$  bestaat waarvoor  $BR^i(N_{P_{t'}}) = BR^i(M_{P_{t'}})$ . We kunnen nu lemma 6.5 toepassen voor alle  $\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$  door identificatie van

$$\begin{array}{lll} X \leftrightarrow S^i, & Y \leftrightarrow S^{-i}, & f \leftrightarrow u^i(\cdot, \sigma^{-i}), \\ x_* \leftrightarrow s_*^i, & z \leftrightarrow s_*^{-i}, & f_y \leftrightarrow u^i(\cdot, s_*^{-i}). \end{array}$$

We vinden dan dat er voor alle  $\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$  een coëfficiënt  $\lambda_{\sigma^{-i}} < 1$  van  $u^i(\cdot, s_*^{-i})$  bestaat waarvoor

$$s_*^i \notin \operatorname{argmax}_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma^{-i}) = BR^i(\sigma^{-i}).$$

We kunnen dan een coëfficiënt  $\lambda = \max_{\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}} \lambda_{\sigma^{-i}} < 1$  vinden waarvoor

$$s_*^i \notin BR^i(N_{P_{t'}}) = BR^i(M_{P_{t'}}).$$

We moeten dus bewijzen dat er een  $\varepsilon$  bestaat waarvoor  $\sigma^{-i}(s_*^{-i}) \geq \lambda, \forall \sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$ . We kunnen dit doen door  $\varepsilon$  zodanig te kiezen dat

$$\begin{aligned} 1 - (N^{-i} - 1)\varepsilon &\geq \lambda, \\ \varepsilon &\leq \frac{1 - \lambda}{N^{-i} - 1} > 0. \end{aligned}$$

Gegeven de geschiedenis  $\zeta_{t'}$  zal er dus onvermijdelijk een  $s^i \neq s_*^i$  gespeeld worden. Dit is in tegenspraak met het feit dat de beschouwde  $\zeta$  compatibel is met  $\phi^i$ . De veronderstelling dat  $s_*$  geen evenwicht is, is dus fout.  $\square$

We hebben in het bewijs impliciet verondersteld dat de speler de gedragsregel  $\phi_t^i \in BR^i(M_{P_t})$  gebruikt. Hieruit volgt dat ook voor  $\phi_t^i \in \underline{P}_t$ -maximin-strategieën stelling 6.4 geldt aangezien deze laatste strategieën ook deel uitmaken van  $BR^i(M_{P_t})$ .

### 6.3.3 Herhaald spelen van een gemengd strategieprofiel

Voor sterk asymptotische gedragsregels wordt in [12, proposition 4.2] verder nog de volgende stelling bewezen.

#### Stelling 6.6

We beschouwen een  $\zeta \in \mathcal{Z}$  waarvoor voor een bepaalde  $\sigma_* \in \Sigma$  geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa_t}{t} = \sigma_*^{-i}, \forall i \in M.$$

Indien  $\zeta$  compatibel is met gedragsregels  $\phi^i$  die sterk asymptotisch kortzichtig zijn ten opzichte van asymptotisch empirische inschattingregels  $\mu^i$ , dan is  $\sigma_*$  een evenwicht.

We kunnen weerom voor de imprecieze leer methode een gelijkaardig resultaat bekomen.

#### Stelling 6.7

We beschouwen een  $\zeta \in \mathcal{Z}$  waarvoor voor een bepaalde  $\sigma_* \in \Sigma$  geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa_t^{(i)}}{t} = \sigma_*^{-i}, \forall i \in M. \quad (6.10)$$

Indien de inschattingregel  $\mu^i$  en een gedragsregel  $\phi^i$  van de imprecieze leer methode worden gebruikt en indien  $\zeta$  compatibel is met  $\phi^i$ , dan is  $\sigma_*$  een evenwicht.

Het verschil betreft weerom enkel de eisen voor de gedragsregel, gezien de inschattingregel van de imprecieze leer methode asymptotisch empirisch is. Het bewijs zal opnieuw geleverd worden voor  $\phi_t^i \in BR^i(M_{P_t})$ , maar ook gelden voor  $\phi_t^i \in \underline{P}_t$ -maximin-strategieën.

**Bewijs van stelling 6.7** Gezien de inschattingregel  $\mu^i$  asymptotisch empirisch is geldt er dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{\sigma^{-i} \in M_{P_t}} \left\| \sigma^{-i} - \frac{\kappa_t^{(i)}}{t} \right\| = 0.$$

Samen met (6.10) volgt hieruit dat

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \in (0, 1], \exists t : \max_{\sigma^{-i} \in M_{P_t}} \|\sigma^{-i} - \sigma_*^{-i}\| < \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon \in (0, 1], \exists t : \max_{\sigma^{-i} \in M_{P_t}} |\sigma^{-i}(s^{-i}) - \sigma_*^{-i}(s^{-i})| < \varepsilon, \forall s^{-i} \in S^{-i}. \end{aligned}$$

We kunnen dus voor alle  $t' \geq t$  en  $\sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}$  schrijven dat

$$\begin{aligned} \sigma^{-i} &= \overbrace{\lambda_*}^{> 1 - N^{-i}\varepsilon} \sigma_*^{-i} + \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} \overbrace{\lambda_{s^{-i}}}^{|\lambda_{s^{-i}}| < \varepsilon} s^{-i} \\ \Rightarrow u^i(s^i, \sigma^{-i}) &= \lambda_* u^i(s^i, \sigma_*^{-i}) + \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} \lambda_{s^{-i}} u^i(s^i, s^{-i}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Veronderstellen we nu dat  $\sigma_*$  geen evenwicht is, dan zal er minstens voor één speler gelden dat

$$\exists \tilde{s}^i \in S^i : \sigma_*^i(\tilde{s}^i) > 0 \text{ en } \tilde{s}^i \notin BR^i(\sigma_*^{-i}) = \operatorname{argmax}_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma_*^{-i}).$$

Volledig analoog aan het bewijs van stelling 6.4 zullen we bewijzen dat er een  $\varepsilon \in (0, 1]$  bestaat, waarvoor  $\tilde{s}^i \notin BR^i(\sigma^{-i}), \forall \sigma^{-i} \in M_{P_{t'}}$ . We moeten dus opnieuw enkel kijken naar een eindige verzameling  $N_{P_{t'}} \subseteq M_{P_{t'}}$ . We kunnen nu lemma 6.5 toepassen voor alle  $\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$  door identificatie van

$$\begin{aligned} X &\leftrightarrow S^i, & Y &\leftrightarrow S^{-i} \cup \{\sigma_*^{-i}\}, & f &\leftrightarrow u^i(\cdot, \sigma^{-i}), \\ x_* &\leftrightarrow \tilde{s}^i, & z &\leftrightarrow \sigma_*^{-i}, & f_y, f_z &\leftrightarrow u^i(\cdot, s^{-i}), u^i(\cdot, \sigma_*^{-i}). \end{aligned}$$

We vinden dan dat er voor alle  $\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$  een coëfficiënt  $\lambda_{\sigma^{-i}} < 1$  van  $u^i(\cdot, \sigma_*^{-i})$  bestaat waarvoor

$$\sigma_*^i \notin \operatorname{argmax}_{s^i \in S^i} u^i(s^i, \sigma^{-i}) = BR^i(\sigma^{-i}).$$

We kunnen dan een coëfficiënt  $\lambda = \max_{\sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}} \lambda_{\sigma^{-i}} < 1$  vinden waarvoor

$$\sigma_*^i \notin BR^i(N_{P_{t'}}) = BR^i(M_{P_{t'}}).$$

We moeten dus bewijzen dat er een  $\varepsilon$  bestaat waarvoor  $\lambda_* \geq \lambda, \forall \sigma^{-i} \in N_{P_{t'}}$ . We kunnen dit doen door  $\varepsilon$  zodanig te kiezen dat

$$\begin{aligned} 1 - N^{-i}\varepsilon &\geq \lambda, \\ \varepsilon &\leq \frac{1 - \lambda}{N^{-i}} > 0. \end{aligned}$$

Er zal dus wegens (6.11) onvermijdelijk voor alle  $t' \geq t$  een  $s^i \neq \tilde{s}^i$  gespeeld worden. Dit is in tegenspraak met (6.10), gezien dan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_t^{(-i)}}{t}(\tilde{s}^i) = 0 \neq \sigma_*^i(\tilde{s}^i) > 0.$$

De veronderstelling dat  $\sigma_*$  geen evenwicht is, is dus fout. □

De stellingen in §6.3.2 en §6.3.3 geven voorwaarden waaraan een leer methode moet voldoen opdat er enkel naar een evenwicht van een spel kan worden geconvergeerd. Maar behalve duidelijk maken dat er convergentie naar evenwichten mogelijk is zeggen ze niets over het al dan niet optreden van convergentie voor een willekeurig spel. Voor de leer methode die gebruik maakt van precieze waarschijnlijkheden worden in [2, §2.3] voorwaarden opgegeven waaronder convergentie sowieso optreedt en wordt er ook een voorbeeld gegeven van een spel waarbij convergentie niet noodzakelijk optreedt.

## 6.4 Bronvermelding

Behalve definities 6.5 en 6.6 werden de definities in §6.2 uit [12, §4] overgenomen. Ook stellingen 6.3 en 6.6 kwamen hieruit. Stelling 6.1 en het bewijs ervan werd gevonden in [2, §2.3].

## Besluit

Dit besluit bestaat uit een evaluatie van de onderzochte imprecieze leer methode. Aangezien ze een uitbreiding is van de in de literatuur reeds uitgebreid besproken precieze leer methode, is deze laatste het referentiepunt bij uitstek.

Het grote onderscheid tussen beide methodes is de gebruikte inschattingregel. Deze weerspiegeling van de voor de spelers beschikbare gegevens is voor de precieze leer methode altijd even duidelijk bepaald. Hiermee in tegenstelling is deze weerspiegeling voor de imprecieze leer methode altijd in bepaalde mate onbepaald, waarbij de onbepaaldheid afneemt indien de hoeveelheid beschikbare gegevens toeneemt. Het besluit dat hieraan kan worden vastgeknoopt is dat de imprecieze leer methode het voordeel heeft een arbitraire initiële inschattingregel te vermijden, die bij de precieze leer methode noodzakelijk is.

Dit voordeel heeft echter ook tot gevolg dat dat er niet altijd een eenduidige oplossing wordt gevonden voor het beslissingsprobleem. Er kan gevreesd worden dat dit nadelig is voor de eigenschappen van de dynamica van de imprecieze leer methode. Dit blijkt niet zo te zijn.

Als we namelijk de onderzochte eigenschappen van de twee methodes naast elkaar zetten, zien we dat ze zeer gelijkaardig zijn. Het is dus positief dat het toelaten van onbepaaldheid in de inschattingen niet leidt tot minder sterke convergentieresultaten. De verschillen in dynamica die noodzakelijkerwijze toch optreden, zijn niet van die aard dat één van beide methodes te verkiezen valt boven de andere. Deze verschillen laten ons echter toe, afhankelijk van de toepassing, een van beide 'complementaire' methodes te kiezen.

Het in dit werk besproken onderzoek laat noodzakelijkerwijs nog vele vragen onbeantwoord en geeft ook aanleiding tot nieuwe vragen. De volgens ons interessantste van deze vragen formuleren we als volgt onder de vorm van enkele suggesties.



1. Een logische voortzetting van de stellingen in §6.3 is het onderzoek van *voorwaarden voor convergentie en niet-convergentie* in het geval dat de imprecieze leermethode wordt gebruikt.
2. We kunnen ook nagaan of de stellingen 6.4 en 6.7 uitbreidbaar zijn tot alle leermethodes met beoogd kortzichtige gedragsregels. We zouden deze stellingen zelfs kunnen trachten uit te breiden naar leermethodes met beoogd sterk asymptotisch kortzichtige gedragsregels.
3. Het zou ook interessant zijn te weten wat de gevolgen zijn voor de dynamica wanneer we een welbepaalde methode (deterministisch of m.b.v. een toevalsgenerator) gebruiken om een gedragsregel uit te kiezen (zie §5.2.2 en §5.2.3).
4. Ook kan onderzocht worden of de uiteengezette theorie toepasbaar is indien we een alternatieve interpretatie gebruiken van evenwichten bestaand uit een gemengd strategieprofiel. We denken met name aan de interpretatie van Harsanyi (zie b.v. [12, §7], [18] of [19]), waarbij deze evenwichten gezien worden als een gevolg van louter individueel bekende, willekeurige variaties in de opbrengst van een speler.

Natuurlijk kunnen ook de kort in bijlage A besproken uitbreidingen aanleiding geven tot verder onderzoek.

Met deze suggesties sluiten we het onderzoek in dit werk af en hopen we tegelijkertijd de aanzet te hebben gegeven tot verder onderzoek.

# Uitbreidingen

## A.1 Spelen met meer dan twee spelers

Allereerst moeten we de notatie van de strategieën als volgt uitbreiden

$$\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^m) \in \mathbf{S} = S^1 \times \dots \times S^m = \prod_{j=1}^m S^j,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \dots, \sigma^m) \in \boldsymbol{\Sigma} = \prod_{j=1}^m \Sigma^j.$$

Een handige notatie voor de strategieën van de tegenspelers is weerom

$$\mathbf{s}^{-i} = (s^1, \dots, s^{i-1}, s^{i+1}, \dots, s^m) \in \mathbf{S}^{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m S^j,$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{-i} = (\sigma^1, \dots, \sigma^{i-1}, \sigma^{i+1}, \dots, \sigma^m) \in \boldsymbol{\Sigma}^{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \Sigma^j. \quad (\text{A.1})$$

De opbrengstfunctie voor speler  $i$  wordt nu

$$u^i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}} u^i(\mathbf{s}) \prod_{j=1}^m \sigma^j(s^j).$$

Bemerk dat we hier impliciet opnieuw hebben verondersteld dat de toevalsgeneratoren, gebruikt door de verschillende spelers voor het spelen van een gemengde strategie, onafhankelijk zijn.

Om de theorie uiteengezet in de hoofdstukken 2, 4, 5 en 6 ook te kunnen toepassen op deze situatie kunnen we de tegenspelers  $-i$  zien als één speler, waarvan de strategieruimte dan veel complexer is.

Bemerk dat de definitie van de gemengde strategieruimte van  $-i$  in (A.1) niet de enig mogelijke is. We zouden  $\boldsymbol{\Sigma}^{-i}$  ook kunnen definiëren als een waarschijnlijkheidsverdeling van de strategieën  $\mathbf{s}^{-i}$ , namelijk

$$\boldsymbol{\sigma}^{-i} \in \boldsymbol{\Sigma}^{-i} \equiv \Delta(\mathbf{S}^{-i}). \quad (\text{A.2})$$

Definitie (A.2) laat echter correlatie toe in het spel van de tegenspelers. Dit is niet mogelijk, aangezien we eisen dat de toevalsgeneratoren van de spelers onafhankelijk zijn (zie ook voetnoot 14 van hoofdstuk 2).

De simplexen die overeenkomen met (A.1) en (A.2) zullen ook verschillen. Bekijken we bijvoorbeeld een spel waarbij  $-i = \{2, 3\}$ ,  $N^2 = 2 = N^3$ . De ‘simplex’ van de tegenspeler  $-i$ , overeenkomend met (A.1), wordt dan gecreëerd uitgaande van de simplexen van spelers 2 en 3. Deze ‘simplex’ (die ook compact en convex is) zal dan een vierkant zijn opgespannen door vier zuivere ‘strategieën’  $s^{-i} = (s^2, s^3)$ . De simplex van de tegenspeler  $-i$ , overeenkomend met (A.2) echter, wordt dan gecreëerd uitgaande van de vier zuivere ‘strategieën’  $s^{-i} = (s^2, s^3)$ . Deze simplex is een tetraëder met als hoekpunten de vier zuivere ‘strategieën’  $s^{-i} = (s^2, s^3)$ .

We zien aan de hand van dit voorbeeld dat we de in dit werk uiteengezette theorie niet noodzakelijk op deze wijze eenvoudigweg kunnen uitbreiden. Onder andere de definities voor het beste antwoord,  $M_t$  en de inschattingregel zullen met zorg moeten worden geverifieerd of aangepast. In [2, §2.5] wordt kort fictief spelen met meerdere spelers besproken. Het is duidelijk dat de uitbreiding van de leermethode voor spelen met meerdere spelers een interessante mogelijkheid voor verder onderzoek is.

## A.2 Kortzichtigheid en het imprecieze Dirichletmodel

In §6.2.2 hebben we gezien dat de in dit werk uiteengezette imprecieze leermethode niet asymptotisch kortzichtig is (definitie 6.4). Als we de eigenschap van kortzichtigheid (definitie 6.2) toch wensen te behouden zullen we de leermethode moeten aanpassen. Dit kan gebeuren zoals aangegeven werd in de volgende definitie.

**Definitie A.1 (alternatieve inschattingregels van de imprecieze leermethode)**  
*Alternatieve inschattingregels van de leermethode gebaseerd op het imprecieze Dirichletmodel zijn*

1.  $\mu_t^i = \sigma^{-i} \in M_{P(X|\beta_t, M_t)}$ , waarbij de keuze van  $\sigma^{-i}$  op deterministische wijze gebeurt.<sup>1</sup>
2.  $\mu_t^i = \sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$ , waarbij de keuze van  $\sigma^{-i}$  gebeurt met behulp van een toevalsgenerator en een waarschijnlijkheidsverdeling  $f$ , waarvoor

$$\begin{cases} f(\sigma^{-i}) > 0, & \forall \sigma^{-i} \in M_{P(X|\beta_t, M_t)}, \\ f(\sigma^{-i}) = 0, & \forall \sigma^{-i} \in \Sigma^{-i} \setminus M_{P(X|\beta_t, M_t)}. \end{cases}$$

1. Indien deze deterministische keuze in elke sessie overeenkomt met eenzelfde  $\rho_0^{-i} \in \Sigma^{-i}$ , dan herleidt deze inschattingregel zich tot die van het precieze geval.

De inschattingregel<sup>2</sup> bestaat dan uit slechts één strategie, net zoals in het precieze geval. We kunnen dan de gedragsregel die kortzichtig is ten opzichte van deze  $\mu_t^i$  definiëren.

**Definitie A.2 (alternatieve gedragsregel van de imprecieze leermethode)**

*De alternatieve gedragsregel van de leermethode gebaseerd op het imprecieze Dirichletmodel is*

$$\phi_t^i \in BR^i(\mu_t^i).$$

Voor deze alternatieve methode zullen de stellingen 6.3 en 6.6 dus ook opgaan. Voor de tweede alternatieve inschattingregel echter zal niet-convergentie naar niet-evenwichten gebeuren met waarschijnlijkheid nul. Het is in het algemeen echter niet zo dat stelling 6.1 of stelling 6.2 opgaan.

Volgens ons is er echter een probleem bij de interpretatie van deze alternatieve leermethode. Wat kan de spelers ertoe aanzetten om één strategie uit  $M_P$  een waarschijnlijker keuze voor zijn tegenspeler te achten? De enige manier om subjectieve oordelen te vermijden is dan om de leermethode louter te zien als een gids voor het bereiken van evenwichten.

---

2. Bemerk dat de methode om deze inschattingregel te kiezen gerust mag afhangen van  $t$ .

# Bijlage **B**

## Enkele wiskundige definities

Om te beginnen tonen we de symbolen gebruikt voor verschillende verzamelingen getallen.  $\mathbb{N}$  voor de natuurlijke getallen  $\{0, 1, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}$  voor de gehele getallen  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  en  $\mathbb{R}$  voor de reële getallen. Bovenindices  $+$  en  $-$  geven weer dat we enkel de strikt positieve respectievelijk strikt negatieve elementen van een verzameling beschouwen, bijvoorbeeld  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ . Als we dan een onderindex  $0$  toevoegen geven we weer dat nul deel uitmaakt van de verzameling, bijvoorbeeld  $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}$ .

Verder geven we hier enkele definities die we gebruikt hebben. We hebben ze alfabetisch gerangschikt. De gebruikte referenties zijn [20], [21], [1, Appendix] en syllabi kandidaturen burgerlijk ingenieur. Waar nodig veronderstellen we impliciet dat een afstand tussen elementen van een verzameling werd gedefinieerd.

### **Definitie B.1 (afbeelding)**

Een functie  $f : X \rightarrow Y$  is een afbeelding indien  $\text{dom}(f) = X$ .

### **Definitie B.2 (regel van Bayes)**

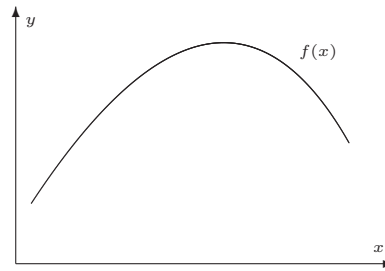
Beschouw een verzameling van mogelijke toestanden  $\Omega = \{\omega_1, \dots\}$  die continu mag zijn. Beschouw verder een gebeurtenis  $A$ . De regel van Bayes zegt dan dat

$$P(\omega_i | A) = \frac{P(\omega_i) P(A | \omega_i)}{\sum_{\forall \omega_j} P(\omega_j) P(A | \omega_j)}.$$

Hierbij staan  $P(\cdot)$  en  $P(\cdot | \cdot)$  respectievelijk voor kans en voorwaardelijke kans. Indien  $\Omega$  continu is wordt de sommatie door een integratie vervangen.

### **Definitie B.3 (begrensde verzameling)**

Een verzameling is begrensd als ze in een (hyper)sfeer met eindige straal opgesloten kan worden.



**Figuur B.1:** Een concave functie.

**Definitie B.4 (compacte verzameling)**

Een verzameling is compact indien ze zowel gesloten als begrensd is.

**Definitie B.5 (concave functie)**

Een functie  $y = f(x)$  is concaaf indien voor  $x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$  en voor  $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Dit wordt geïllustreerd in figuur B.1. Voor het geval van een strikt concave functie moeten we  $\geq$  door  $>$  vervangen.

**Definitie B.6 (convexe functie)**

Een functie  $y = f(x)$  is convex indien voor  $x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$  en voor  $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Voor het geval van een strikt convexe functie moeten we  $\leq$  door  $<$  vervangen.

**Definitie B.7 (convexe verzameling)**

Een verzameling  $X$  is convex indien voor  $x_1, x_2 \in X$  en voor  $\lambda \in [0, 1]$  er geldt dat  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ . (Bemerkt dat  $X$  lineair moet zijn.)

**Definitie B.8 (functie)**

Een relatie  $f : X \rightarrow Y$  tussen twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  is een functie indien

$$\exists! y \in \text{range}(f) \subseteq Y : y = f(x), \forall x \in \text{dom}(f) \subseteq X.$$

**Definitie B.9 (gammafunctie)**

De gammafunctie  $\Gamma$  is de voortzetting van  $\mathbb{N}$  naar  $\mathbb{R}$  van de faculteetsfunctie  $n \rightarrow n!$ . We schrijven

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^- &\rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}, \end{aligned}$$

waarbij  $\gamma = 0,577215664901533 \dots$  de constante van Euler is. De twee belangrijkste eigenschappen zijn  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  en  $\Gamma(1) = 1$ .

**Definitie B.10 (gesloten verzameling)**

Een verzameling  $X$  heet gesloten indien haar complement open is. De open verzameling van inwendige elementen van  $X$  noteren we  $\overset{\circ}{X}$ . We noemen dan  $\partial X = X \setminus \overset{\circ}{X}$  de rand van  $X$ .

**Definitie B.11 (infimum)**

Het infimum van een geordende verzameling (zoals b.v.  $\mathbb{R}$ ) is de grootste ondergrens van de verzameling. Het infimum maakt niet noodzakelijk deel uit van de verzameling. We gebruiken de notatie  $\inf$ .

**Definitie B.12 (inwendige elementen)**

Een element  $x \in X$  is inwendig (aan  $X$ ) indien er een omgeving

$$Y = \{y \mid \delta > \|y - x\|, \delta \in \mathbb{R}^+\}$$

bestaat waarvoor geldt dat  $Y \subseteq X$ .

**Definitie B.13 (maximum)**

Indien het supremum van een verzameling deel uitmaakt van de verzameling noemen we dit het maximum van die verzameling. We gebruiken de notatie  $\max$ . Indien de verzameling in kwestie de range van een functie  $f$  is, dan duiden we die elementen van  $\text{dom}(f)$  waarvoor  $f$  wordt gemaximaliseerd aan door  $\text{argmax } f$ .

**Definitie B.14 (minimum)**

Indien het infimum van een verzameling deel uitmaakt van de verzameling noemen we dit het minimum van die verzameling. We gebruiken de notatie  $\min$ .

**Definitie B.15 (open verzameling)**

Een verzameling  $X$  heet open indien alle  $x \in X$  inwendig zijn.

**Definitie B.16 (relatie)**

Een relatie  $R$  tussen twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  wordt bepaald door een deelverzameling  $Z$  van  $X \times Y$ .  $Z$  wordt dan de grafiek van de relatie  $R$  genoemd en we schrijven dan voor  $x \in X$  en  $y \in Y$  dat

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in Z$$

We noteren verder ook nog

$$\begin{aligned} \text{dom}(R) &= \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ waarvoor } xRy \text{ geldt}\}, \\ \text{range}(R) &= \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ waarvoor } xRy \text{ geldt}\}. \end{aligned}$$

**Definitie B.17 (supremum)**

Het supremum van een geordende verzameling (zoals b.v.  $\mathbb{R}$ ) is de kleinste bovengrens van de verzameling. Het supremum maakt niet noodzakelijk deel uit van de verzameling. We gebruiken de notatie  $\sup$ .

# Bibliografie

- [1] James W. Friedman. *Game Theory with Applications to Economics*. Oxford University Press, New York, 1989. 1, 8, 18, 23, 24, 27, 92
- [2] Drew Fudenberg and David K. Levine. *The Theory of Learning in Games*, volume 2 of *The MIT Press Series on Economic Learning and Social Evolution*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1998. 1, 18, 23, 27, 58, 63, 67, 78, 86, 90
- [3] Morton D. Davis. *Inleiding tot de speltheorie*. Het Spectrum, Antwerpen, 1973. Vertaling van: *Game Theory. A Nontechnical Introduction*. Basic Books, New York, 1970. 1, 27
- [4] J. D. Williams. *Speltheorie*. Marka-reeks. Het Spectrum, Antwerpen, 1966. Vertaling van: *The Compleat Strategyst*. McGraw Hill Book Company, New-York, 1954. 1, 18, 27
- [5] Cedric A. B. Smith. Consistency in statistical inference and decision. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 23(1):1–37, 1961. 1, 7, 27, 30
- [6] Gert de Cooman. Learning in two-player fictitious play using the imprecise Dirichlet model. Artikel in voorbereiding, 2001. 1, 27, 46, 47, 48, 49, 50, 56, 58, 65, 67
- [7] Peter Walley. *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall, London, first edition, 1991. 1, 7, 30, 33, 38, 39, 41, 43, 44, 47, 56, 58
- [8] Peter Walley. Coherent upper and lower previsions. *Imprecise Probabilities Project: <http://ippserv.rug.ac.be>*, 1998. 1, 44
- [9] Peter Walley. Measures of uncertainty in expert systems. *Artificial Intelligence*, 83:1–58, 1996. 1, 44
- [10] Gert de Cooman. Imprecisie in de waarschijnlijkheidsleer, 15 december 1999. Nota's van de auteur bij een lezing voor de onderzoeksgroep SYSTEMS aan de Universiteit Gent. 1, 44
- [11] Peter Walley. Inferences from multinomial data: Learning about a bag of marbles. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 58(1):3–57, 1996. 1, 55, 56, 58



- [12] Drew Fudenberg and David M. Kreps. Learning mixed equilibria. *Games and Economic Behaviour*, 5:320–367, 1993. 1, 63, 67, 68, 69, 72, 81, 84, 86, 88
- [13] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944. 5
- [14] Bruno de Finetti. *Theory of Probability*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993. Vertaling van: *Teoria Delle Probabilità*. Giulio Einaudi editore s.p.a., Torino, 1970. 7, 40
- [15] Claude Berge. *Topological Spaces*. Dover Publications, Mineola, New York, 1997. Vertaling van: *Espaces topologiques, fonctions multivoques*. Dunod, Paris, 1962. 23
- [16] G. Boole. *An Investigation of The Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Macmillan, London, 1854. 30
- [17] John Maynard Keynes. *A Treatise on Probability*, volume 8 of *Collected Writings*. Macmillan, London, 1973 edition, 1921. 30
- [18] J. Harsanyi. Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. *Int. J. Game Theory*, 2:1–23, 1973. 88
- [19] Michel Benaïm and Morris W. Hirsch. Mixed equilibria and dynamical systems arising from fictitious play in perturbed games. *Games and Economic Behaviour*, 29:36–72, 1999. 88
- [20] Fritz Reinhardt en Heinrich Soeder. *Atlas van de wiskunde 1: Grondbeginselen, Algebra en Meetkunde*. Sesam. Bosch en Keuning, Baarn, 1977. Vertaling uit het Duits. 92
- [21] Fritz Reinhardt en Heinrich Soeder. *Atlas van de wiskunde 2: Analyse, Toegepaste wiskunde*. Sesam. Bosch en Keuning, Baarn, 1980. Vertaling uit het Duits. 92

# Register

## a

acties (*actions*), 4, 8, 14  
afbeelding, 92  
afstand, 12, 47, 78

## b

Bayesiaanse dogma (*Bayesian dogma*)  
– van ideale precisie  
    (*– of ideal precision*), 42  
– van precisie (*– of precision*), 30  
beslissingsproblemen  
    (*decision problems*), 28, 45, 59, 61  
beste antwoord (*best reply*), 17, 18  
    individuele –, 16  
bindende overeenkomst  
    (*binding agreement*), 6  
boven-semicontinuu  
    (*upper-semicontinuous*), 23

## c

coherentie (*coherence*), 31  
– van onderprevisies  
    (*– of lower previsions*), 36, 39  
convergentie (*convergence*), 86, 88, 91  
correlatie (*correlation*), 70, 90  
Cournot-aanpassing  
    (*Cournot adjustment*), 61

## d

dekpunt (*fixed point*), 23  
–stelling van Kakutani, 23  
Dirichlet (*Dirichlet*)  
–model (*– model*), 51, 52  
    imprecieze – (*imprecise –*), 56  
    precieze – (*precise –*), 55  
–verdeling (*– distribution*), 51, 54

a-posteriori– (*posterior –*), 52

a-priori– (*prior –*), 52

dominantie (*dominance*)

strikte – (*strict –*), 20

zwakke – (*weak –*), 21

dynamica, 62, 69

– van een leermethode, 68

## e

evenwicht (*equilibrium*), 18, 59, 68

bestaan van –en

    (*existence of an –*), 23

niet-coöperatief –

    (*non-cooperative –*), 18

strikt – (*strict –*), 18

absorptie naar een –, 78

voorwaardelijke absorptie naar  
    een –, 80

extensieve vorm (*extensive form*), 8

## f

fictief spelen (*fictitious play*), 62

functie, 93

    concave –, 93

    convexe –, 93

    gamma–, 93

## g

gebeurtenis (*event*), 32

indicatorfunctie van een –

    (*indicator function of an –*), 42

gedragsregel (*behavior rule*), 61

– van Cournot-aanpassing, 61

– van de imprecieze

    leermethode, 66

alternatieve –, 91

- van de precieze leer methode, 64
- kortzichtige – (*myopic* –), 72
  - asymptotisch – (*asymptotically* –), 73
  - beoogd –, 76
  - sterk asymptotisch – (*strongly asymptotically* –), 72
- gegeerdheidsaxioma's (*axioms for desirability*), 33
- gelijkvormigheid, 57
- gemeengoed (*common knowledge*), 9
- geschiedenis (*history*), 60
  - compatibele – (*compatible* –), 72
  - eindige –, 60
  - oneindige – (*infinite* –), 60
- getallen, 92
  - gehele –, 92
  - natuurlijke –, 92
  - reële –, 92
- gevolgtrekking (*inference*), 45, 59, 60
  - statistische – (*statistical* –), 51
- gok (*gamble*), 32, 45
  - gedrag, 34
  - {0, 1}-waardige – (*0-1 valued* –), 42
  - gegeerde – (*desirable* –), 33
  - marginale – (*marginal* –), 34
  - maximale – (*maximal* –), 47
  - meetbare – (*measurable* –), 48
  - ontoelaatbare – (*inadmissible* –), 46
  - toelaatbare – (*admissible* –), 46
- gokverhouding (*betting rate*)
  - billijke – (*fair* –), 43
  - infimum– (*infimum* –), 43
  - supremum– (*supremum* –), 43

**h**

- herinnering (*recall*)
  - imperfecte – (*imperfect* –), 9
  - perfecte – (*perfect* –), 9
- hyperparameter (*hyperparameter*), 54–58, 80

**i**

- imprecisie (*imprecision*), 40, 43, 58
- infimum, 94
- informatie (*information*), 9

- set (– *set*), 8
- situatie (– *situation*), 9, 68
- imperfecte – (*imperfect* –), 9
- onvolledige – (*incomplete* –), 9
- perfecte – (*perfect* –), 9
- volledige – (*complete* –), 9, 15
- volmaakte –, 9
- inschatting (*assessment*), 52, 60, 63, 65
- inschattingsregel (*assessment rule*), 60
  - van Cournot-aanpassing, 61
  - van de imprecieze leer methode, 65
    - alternatieve –, 90
  - van de precieze leer methode, 63
- adaptieve – (*adaptive* –), 76
- asymptotisch empirische – (*asymptotically empirical* –), 77
- interpretatie (*interpretation*)
  - gedragsgerichte – (*behavioural* –), 29, 34
  - gegevensgerichte – (*evidential* –), 29
  - logische – (*logical* –), 29
  - operationalistische – (*operationalist* –), 30
  - personalistische – (*personalist* –), 29
  - rationalistische – (*rationalistic* –), 29
  - theoretische – (*theoretical* –), 30

**k**

- kans (*chance*), 43
- kansfunctie (*likelihood function*), 51, 52, 54
- kansgeld (*probability currency*), 7
- knooppunt (*node*)
  - beslissings– (*decision* –), 8
  - eind– (*terminal* –), 8

**l**

- leer (*learning*)
  - cyclus, 59
  - methode (– *model*), 59, 62, 68, 69
    - alternatieve –, 91
    - dynamica van een –, 68
    - imprecieze –, 64, 71
    - precieze –, 63, 71

## **m**

- maximum, 94
- minimum, 94
- multinomiale (*multinomial*)
  - bemonstering (– *sampling*), 51, 52
  - verdeling (– *distribution*), 51

## **n**

- natuurlijke uitbreiding
  - (*natural extension*), 31, 37, 56
  - theorema (– *theorem*), 41
- nut (*utility*), 7
  - lineair – (*linear –*), 7

## **o**

- onbepaaldheid (*indeterminacy*), 28, 30
- onderenveloppe (*lower envelope*), 40
  - van lineaire previsions
    - (– *of linear previsions*), 40
  - van precieze Dirichletmodellen, 56
  - theorema (– *theorem*), 41
- onzekerheidsmodel, 34, 42, 43, 51
- opbrengst (*payoff*), 7
  - functie (– *function*), 13, 14, 89
  - matrix (– *matrix*), 12
  - vector (– *vector*), 13
  - bereikbare –en (*attainable –s*), 19
- ordering (*ordering*), 46
  - partiële – (*partial –*), 47

## **p**

- Pareto-optimaal (*Pareto-optimal*), 19, 59
- previsie (*prevision*)
  - boven– (*upper –*), 34
  - toegevoegde – (*conjugate –*), 34
  - lineaire – (*linear –*), 39
  - onderenveloppe van –s
    - (*lower envelope of –s*), 40
  - nietszeggende – (*vacuous –*), 40
  - onder– (*lower –*), 33, 34
- prijs (*price*)
  - billijke – (*fair –*), 40
  - infimumverkoop–
    - (*infimum selling –*), 35
  - supremumaankoop–
    - (*supremum buying –*), 34

principe van rechtstreekse

gevolgtrekking

(*principle of direct inference*), 29

probabilistisch redeneren

(*probabilistic reasoning*), 28, 31, 38, 45

## **r**

- rationaliteit (*rationality*), 31
  - externe – (*external –*), 32
  - interne – (*internal –*), 31
- regel van Bayes, 52, 92
- reguliere uitbreiding
  - (*regular extension*), 56
- relatie, 94

## **s**

- sensitiviteitsanalyse
  - (*sensitivity analysis*), 42
- sessie (*round*), 60
- simplex (*unit simplex*), 11, 90
- spel (*game*), 4
  - met samenwerking
    - (*cooperative –*), 6
  - met tegengestelde belangen
    - (*strictly competitive –*), 24
  - zonder samenwerking
    - (*non-cooperative –*), 6
  - boom (– *tree*), 8
  - regels (*rules of the –*), 4, 15
  - theorie (– *theory*), 5
  - verloop, 4
  - constantesom– (*constant-sum –*), 24
  - eindig – (*finite –*), 11
  - nulsom– (*zero-sum –*), 25
  - waarde van het – (*value of the –*), 25
- spelers (*players*), 4, 6
  - tegen– (*opponents*), 6, 89
- stapgrootte, 70
- strategie (*strategy*), 10, 89
  - profiel (– *profile*, – *combination*), 10
  - ruimte (– *space*), 89
    - van het spel (– *of the game*), 10
  - individuele –, 10
- Bayes– (*Bayes –*), 48, 49
- empirische – (*empirical –*), 77

gemengde – (*mixed* –), 11  
maximale – (*maximal* –), 47–50  
maximin– (*maximin* –), 25  
 $M$ -maximin–, 27  
 $M_P$ -maximin–, 50  
 $P$ -maximin–, 49  
ontoelaatbare – (*inadmissible* –), 46  
toelaatbare – (*admissible* –), 46  
zuivere – (*pure* –), 11  
strategische vorm  
    (*strategic form, normal form*), 12  
supremum, 94  
supremumnorm, 12  
–topologie, 47

## t

terminologie, 3  
toestand (*state*)  
    verzameling van mogelijke –en  
        (*possibility space*), 32  
    ware – (*true* –), 32  
toevalsgenerator  
    (*i.i.d. generator*), 11, 15, 89

## v

verwachtingswaarde, 51, 54  
verzameling  
    begrensde –, 92  
    compacte –, 93  
    convexe –, 93  
    gesloten –, 94  
    inwendige elementen van een –, 94  
    open –, 94  
    rand van een –, 94  
voorkeuren (*preferences*), 7

## w

waarschijnlijkheid (*probability*)  
    Bayesiaanse – (*Bayesian* –), 30  
    boven– (*upper* –), 43  
    epistemische –  
        (*epistemic* –, *personal* –,  
        *subjective* –), 29  
    imprecieze – (*imprecise* –), 28, 42  
    nietszeggende – (*vacuous* –), 44  
    onder– (*lower* –), 42

precieze – (*precise* –), 28, 43  
statistische –  
    (*statistical* –, *objective* –,  
    *aleatory* –, *physical* –, *chance*), 29  
waarschijnlijkheidsverdeling  
    (*distribution*), 48, 51  
toegevoegde familie –en  
    (*conjugate family of –s*), 52

## z

zeker verlies vermijden  
    (*avoiding sure loss*), 31  
– van onderprevisies  
    (*– of lower previsions*), 35